Cálculo Diferencial e Integral I

4ª Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Continuidade e limites.

---

1. Sendo f uma função definida em $\mathbb{R}$ e tal que $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$ onde $I_{\mathbb{R}}$ designa a aplicação idêntica de $\mathbb{R}$ em si mesmo ($I_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

   a) Recorrendo directamente às definições de aplicação injectiva e sobrejectiva, prove que f é necessariamente bijectiva.

   b) Mostre, por meio de exemplos, que uma função f nas condições acima indicadas pode ser:

      i) contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$

      ii) contínua num único ponto de $\mathbb{R}$

      iii) descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|x|^n}{1+|x|^n}$$

3. Considere a função f, definida no intervalo $]-1,1[$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

   a) calcule

$$\lim_{x\to -1} f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to 1} f(x)$$

   b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou mínorada e se tem máximo ou mínimo em $]-1,1[$.

   c) Se x_n for uma sucessão convergente para 1, com termos em $]-1,1[$, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.

   d) Dê um exemplo de uma sucessão y_n, de termos em $]-1,1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

4. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x\to 0}(1 - x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})) = 1$