Cálculo Diferencial e Integral I

1ª Ficha de problemas

Princípio de indução matemática. O axioma do supremo e suas consequências

---

1. Usando o princípio de indução matemática, prove as seguintes afirmações:

   a)
   $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   Sugestão: Recorde a definição de somatório,
   $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1, \qquad n = 1$$
   $$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   b)
   $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Considere os seguintes conjuntos:

   $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x|+1 > 2x\}$ $\qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^4+3x^3+2x^2 \leq 0\}$ $\qquad C = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

   (a) Mostre que $A =]-\infty, 1[$ e $B = [-2,-1] \cup \{0\}$. Verifique se os conjuntos A, B, C, $A \cap B \cap C$, são majorados ou minorados e caso sejam, indique o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.

   (b) Caso existam, determine o supremo, infimo, máximo e minimo de cada um dos conjuntos A, B, C, $A \cap B \cap C$.

3. Mostre que, se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$, tais que, $\sup X > \inf Y$, existem $x \in X$ e $y \in Y$, tais que, $y < x$