Cálculo Diferencial e Integral I

10ª Ficha de problemas

Integral de Riemann

---

1. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+2}{8+\sqrt{(x+1)^3}}dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{1}{e^{2x}-1}dx \quad , \quad c) \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 3\ln x + 2)}dx \quad ,$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx \quad , \quad b) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2}dx \quad , \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}dx \quad ,$$

3. Determine as áreas das regiões planas de $\mathbb{R}^2$ limitadas pelas curvas

   i) $y = \log x$, $y = 1 - x$, $y = 1$.

   ii) $y = x^2 - \pi^2/4$, $y = \cos x$.

4. Determine a área dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

   i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq \pi/2 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq x\cos x \ \}$.

   ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq \left[(x+3)\sqrt{x+2}\,\right]^{-1} \ \}$.

5. Verifique que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}dt.$$

6. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável tal que $f(a+b-x) = f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Verifique que:
$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

7. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por
$$F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{arctg}(\frac{1}{1+t^2}) dt.$$
Mostre que F é uma função impar.

8. Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x) = \int_0^{\log x} x e^{t^2} dt - x.$$
Verifique que f tem um mínimo local em 1.