



Cálculo Diferencial e Integral I

5ª Ficha de problemas

Funções reais. Continuidade e limites. Derivadas

1. Sendo f a função definida em \mathbb{R} , contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } x \geq 1 \\ \operatorname{arcsen}(x) & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

- Determine a .
- Determine $f\left(\frac{4}{\pi} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ e $f\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.
- Estude a função f do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função f . Indique ainda se a função tem máximo, mínimo, supremo ou ínfimo (em todo o seu domínio) e, no caso de existência, indique o seu valor.
- Diga se existem e, no caso de existência, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2. Sendo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, justifique que:

- não existe qualquer sucessão x_n (de termos em $[0, 1]$) tal que $g(x_n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- se existe uma sucessão x_n (de termos em $[0, 1]$) tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

3. Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, uma função contínua, verificando a condição $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

- A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1, 1]$? Justifique.
- Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \operatorname{tg}(f(u_n))$, em que $u_n = \frac{1-n}{n}$.

4. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções, definidas em \mathbb{R} :

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \quad b) g(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}, \quad c) h(x) = x \operatorname{sen}(x^2).$$