Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame/2º Teste - (MEMec; MEAer)

12 de Janeiro de 2009 - 9 horas

Esboço de resolução

***Exame* I(3,5 val.)**

1. i)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n == \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(2(n+1))!}}{\frac{n!}{3^n(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6(2n+1)} = 0$$

A sucessão u_n é limitada uma vez que converge.

ii) Mostremos que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio de indução matemática:

$$\text{para } n = 1 \quad v_2 - v_1 \leq 0 \quad \text{é uma proposição verdadeira}$$

$$\text{mostremos agora para } m \in \mathbb{N} \quad v_{m+1} - v_m \leq 0 \Rightarrow v_{m+2} - v_{m+1} \leq 0$$

$$v_{m+2} - v_{m+1} = \frac{1}{v_{m+1}^{-1} + 2} - \frac{1}{v_m^{-1} + 2} = \frac{v_{m+1} - v_m}{(1 + 2v_m)(1 + 2v_{m+1})}$$

Da hipótese de indução e uma vez que $v_m > 0$ para todo o $m \in \mathbb{N}$ a implicação anterior é uma proposição verdadeira para todo $m \in \mathbb{N}$, da arbitrariedade de m. Do princípio de indução matemática, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, i.e. a sucessão v_n é decrescente.

iii) Uma vez que a sucessão v_n é decrescente e $0 < v_n \leq v_1$, é v_n convergente pois é uma sucessão monótona e limitada. Toda a sucessão real convergente é de Cauchy.

iv) A sucessão w_n é convergente, pois resulta da adição de duas sucessões convergentes.

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Determinemos o limite de v_n, designe-mo-lo para já por v. Sendo v_n convergente, v_{n+1} é igualmente convergente, uma vez que é uma sua subsucessão. Da definição de v_n, $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+2v_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, aplicando o limite à relação anterior, da álgebra de limites vem que $v = \frac{v}{1+v}$, donde $v = 0$. Assim $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

Exame II (6,5 val.)

1. Simplifiquemos f

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3)+1 & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   i) A função f não é diferenciável em $x = 1$, pois não é contínua em $x = 1$,

$$0 = f(1) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} \ln(x+3)+1 = \ln 4 + 1 \neq 0$$

   ii) A função f é diferenciável em $]-1,1[\cup]1,+\infty[$ pois resulta da composição e adição de funções diferenciáveis.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

   iii) A função é estritamente crescente no intervalo $[1,+\infty[$, pois $f'(x) > 0$. A função tem um máximo local em $x = 0$, uma vez que $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x \in]-1,0[$ e $f'(x) > 0$ para $x \in]0,1[$. A função f tem mínimos absolutos em $x = \pm 1$, uma vez que $f(x) > 0$ em $]-1,1[\cup]1,+\infty[$ e $f(\pm 1) = 0$.

   iv) Do teorema de Taylor, $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ para $x \in [1,3]$, onde $P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2$ e $R_2(x) = f'''(c)(x-2)^3/3!$ com c entre 2 e x. 3^{-4} é um majorante do erro que se comete ao aproximar a função f em $[1,3]$ pelo polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x-2$ e é obtido da seguinte forma:

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)(x-2)^3/3!| = |\frac{2(x-2)^3}{6(c+3)^3}| < \frac{|(x-2)|^3}{3^4} < \frac{1}{3^4}$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x} (= 0/0 \text{ uma indeterminação}).$$

Para aplicar a regra de Cauchy, consideremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{tg} x + x^2/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x + x/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cos^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x\cos^2 x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} 2\cos x + 1} = -1/3$$

Da regra de Cauchy conclui-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x} = -1/3.$$

3. Sendo f uma função com quatro zeros em $]a,b[$, (sendo $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$),satisfeitas as condições, do teorema de Rolle aplicado a f em cada um dos três intervalos de extremos nos zeros de f, concluímos que existem três zeros para f' em $]a,b[$. Novamente do teorema de Rolle desta vez aplicado a f' em cada um dos dois intervalos de extremos nos zeros de f', concluímos que existem dois zeros para f'' em $]a,b[$. Finalmente, da aplicação do teorema de Rolle a f'', concluimos que a função f''' tem um zero em $]a,b[$

Exame/2^o Teste III(6 val.)

1.

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 1 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

2. i) Sendo $f(t)\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}$ uma função contínua em $[0,1[$, do teorema fundamental do cálculo integral, a função $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt$ é diferenciável em $]0,1[$. $F(x)$ é igualmente diferenciável, uma vez que resulta da composta de duas funções diferenciáveis e a sua derivada definida em $]0,\pi[$ é dada pela expressão seguinte:

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos x^2)(4-\cos x^2)}}$$

   ii) A função F é monótona, uma vez que $F'(x) < 0$ em $]0,\pi[$.

3.

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2} dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t+2} 2t \, dt =$$

$$2\int_1^2 t^2 - 2t + 5 - \frac{10}{t+2} dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t^2 + 5t - 10\ln(t+2)\right]_1^2 = 26/3 + 20\ln(3/4)$$

4.

$$\frac{A}{2} = \int_0^2 \sqrt{-2(x-2)} dx - \int_0^1 \sqrt{-4(x-1)} dx =$$

$$= \left[-1/2 \frac{(4-2x)^3/2}{3/2}\right]_0^2 + \left[1/4 \frac{(4-4x)^3/2}{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{8}{3}$$

5. Aplicando a integração por partes a $\int_a^x f'(t)dt$, tem-se

$$\int_a^x 1.f'(t)dt = [tf(t)]_a^x\, f(x) - \int_a^x tf''(t)dt.$$

Assim

$$f(x) = f(a)+\int_a^x f'(t)dt = f(a)+xf'(x)-af'(a)-\int_a^x tf''(t)dt+x\int_a^x f''(t)dt-x\int_a^x f''(t)dt =$$

$$= f(a) - af'(a) + xf'(a) - \int_a^x (x-t)f''(t)dt = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

***Exame/2º Teste* IV(4 val.)**

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}} \text{ é divergente, do critério de comparação, pois}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/6}} \text{ é uma série de Dirichlet divergente e } \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}}{\frac{1}{n^{1/6}}} \in \mathbb{R}^+$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \text{ é divergente, do critério de D'Alembert, uma vez que}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n} \text{ é convergente, pois resulta da adição de 2 séries geométricas ambas com razão } r<1$$

A soma da série é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{e}{3-e}$$

2. O raio de convergência obtém-se por

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}} = 2$$

Se $|x-1| < 2$, a série é absolutamente convergente em $-1 < x < 3$

$$x = 3 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{série absolutamente convergente}$$

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{série absolutamente convergente}$$