Cálculo Diferencial e Integral I

1ª Teste - (MEMec; MEAer)

1º semestre de 2008/2009

Esboço de correção do 1º teste

I.(7 val.)

1. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{a_n}$.

   (a) a_n é crescente por indução matemática:

   - $a_2 = \frac{3}{2} > 1 = a_1$.
   - Hipótese de indução: $a_{n+1} \geq a_n$.
     Tese: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

   $$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_n} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{a_{n+1}} \geq \frac{1}{2} + \sqrt{a_n} \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}.$$

   (b) a_n é contractiva se existe $C \in]0, 1[$ tal que

   $$|a_{n+2} - a_{n+1}| < C|a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Temos

   $$|a_{n+2} - a_{n+1}| = a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} < \frac{a_{n+1} - a_n}{2},$$

   já que a_n é crescente e $a_1 = 1$, logo $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > 2$, para $n \in \mathbb{N}$. Considerando pois $C = \frac{1}{2}$, tem-se que a_n é contractiva.

   (c) a_n é convergente, já que é contractiva. Como a_{n+1} é uma subsucessão de a_n, a_{n+1} também é convergente e $\lim a_{n+1} = \lim a_n$. Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$:

   $$\lim a_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2} + \sqrt{a_n} \right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\lim a_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \sqrt{a} \Leftrightarrow$$
   $$a - \frac{1}{2} = \sqrt{a} \Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = a \Leftrightarrow a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$
   $$a = \frac{2 \pm \sqrt{2+1}}{2} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vee a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Como a_n é crescente e $a_1 = 1$, tem-se $a > 1$, logo $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. i) Para n par, $u_n = \frac{n!}{n^n+3^n} + \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{n!/n^n}{1+3^n/n^n} + \frac{1}{2+1/n^2}$.

Para n impar, $u_n = \frac{n!}{n^n+3^n} + \frac{-n^2}{2n^2+1} = \frac{n!/n^n}{1+3^n/n^n} + \frac{-1}{2+1/n^2}$. Assim o conjunto dos sublimites é $\{-1/2, 1/2\}$, uma vez que $\lim u_{2n} = 1/2$ e $\lim u_{2n-1} = -1/2$, já que da escala de sucessões, as sucessões $\frac{n!}{n^n}$, $\frac{3^n}{n^n}$ são infinitésimos.

ii) Sendo u_{2n} e u_{2n-1} sucessões convergentes logo são sucessões limitadas, e assim tem-se que $u_n, \quad n \in \mathbb{N}$ é também limitada.

II.(13 val.)

1. Considere a função $f :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } x \geq -1, \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

i) Para $x > -1$, a função f é contínua pois resulta da adição e composição de funções elementares(polinomiais e inversa de trigonométrica). Para $x < -1$, a função f é contínua pois resulta da multiplicação e composição de funções elementares (polinomiais e exponencial). No entanto, para $x = -1$ a função não é contínua, uma vez que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{\sqrt{e}}{e} \neq f(-1) = -1 + \frac{\pi}{6}$$

ii) Se existisse uma sucessão x_n de termos em $[0, 1]$ tal que

$$f(x_n) = n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

o conjunto $f([0, 1])$ seria um conjunto não limitado. É impossível $f([0, 1])$ ser um conjunto não limitado, uma vez f é uma função contínua em $[0, 1]$ e sendo o intervalo $[0, 1]$ fechado e limitado, a função f é limitada em $[0, 1]$.

iii) Para $x > -1$, a função f é diferenciável pois resulta da soma e composta de funções elementares(polinomiais e inversa de trigonométricas). Para $x < -1$, a função f é também diferenciável pois resulta da produto e composta de funções elementares (polinomiais e exponencial). No entanto, para $x = -1$ a função não sendo contínua também não é diferenciável.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } x > -1, \\ e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

iv) A função f é monótona(estritamente crescente) em $]-\infty,-1[$, uma vez que $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)>0$ para $x\in]-\infty,-1[$.

v) A equação da tangente ao gráfico da função f em $x=-2$ é:

$$y=f(-2)+f'(-2)(x+2),$$

sendo $f(-2)=2e^{-2}$ e $f'(-2)=3e^{-2}$.

vi) Sendo g a função inversa da restrição de f a $[-1/2,1/2]$,

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))},$$

com $g(0)=0$ pois $0=x+\text{arcsen}(x/2)$. Tem-se então $f'(0)=3/2$, de (iii), vindo $g'(0)=2/3$.

2. Seja $f(x)=2x+e^x$. Uma vez que h é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $f(-2)f(0)<0$, do teorema de Bolzano conclui-se que f se anula pelo menos uma vez em $]-2,0[$. Sendo $f'(x)=2+e^x>0$, f é estritamente crescente e consequentemente injectiva, assim o zero de f em $]-2,0[$ é único (i.e. a solução de $2x+e^x=0$ é única).

3. Considere a função $h:]0,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciável no domínio e tal que

$$h(\frac{1}{n+1})=h(\frac{1}{n+2}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Aplicando o teorema de Rolle a h em $\overline{I_{n_1}}=[1/(n+2),1/(n+1)]$, tem-se a existência de $\xi_1\in I_{n_1}$, tal que $h'(\xi_1)=0$.
Da aplicação do teorema de Rolle em $I_{n_p}=[1/(n+p+1),1/(n+p)],\quad p\in\mathbb{N}$, constrói-se uma sucessão ξ_p, tal que $h'(\xi_p)=0,\quad p\in\mathbb{N}$ Admitindo que existe $\lim_{x\to 0}h'(x)$, da definição de limite segundo Heine,

$$\lim_{x\to 0}h'(x)=\lim_{p\to+\infty}h'(\xi_p)=0.$$