Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame - (MEMec; MEAer)

11 de Janeiro de 2010 - 13 horas

I (3,5 val.)

1. Considere a sucessão de termos em $[0,9]$ definida por

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   i) Mostre por indução matemática que a_n é crescente.

   ii) A sucessão é convergente? Justifique.

   iii) Determine o conjunto dos sublimites da sucessão $b_n = a_n + (n!)^{-1/n}$.

II (6,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - 1) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ 2x\,(\ln(-x) + 1) - 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

   i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Defina a função derivada de f.

   ii) A função é monótona em $\mathbb{R}^+$? Justifique.

   iii) Determine os possíveis extremos locais da função f para $x < 0$.

   iv) Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x + 1$ associado à função e determine um majorante para o erro cometido ao aproximar a função por esse polinómio no intervalo $[-11/10, -9/10]$.

2. Determine em $\mathbb{R}$, se existirem, os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{sen}(x-3)}, \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \operatorname{sen}(x) \right)^{1/x}.$$

3. Seja $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existem f' e f''. Sendo $f''(x) < 0, \; x \in]-1,1[$ mostre que se existe uma sucessão $x_n \in]-1/2, 1/2[$ tal que $f'(x_n) = \frac{1}{n+1}$ então f tem pelo menos um máximo local.

III (3,5 val.)

1. Analise a natureza das séries numéricas
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{7/2}} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}\cos(n\pi).$$

2. Considere a série de potências
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}\,(1-2x)^{n+3}$$
   i) Indique o maior intervalo aberto onde a série é absolutamente convergente.
   ii) Determine no intervalo indicado em i) a soma da série.

IV (6,5 val.)

1. Determine o valor dos integrais
$$i)\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{4-(\ln t)^2}}, \qquad\qquad ii)\int_1^2 t\,\mathrm{arctg}(t)dt.$$

2. Determine, usando o método de substituição, o valor do integral
$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2}.$$
   Sugestão: Utilize a substituição $e^x = t$

3. Calcule a área da região limitadas pela curva $y^2 = x(1-x)^2$ e as rectas $x = 0$ e $x = 1/2$.

4. Considere a função $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$$G(x) = \int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$
   i) Defina justificando a função derivada de G.
   ii) O contradomínio de G está contido em $\mathbb{R}^+$? Justifique.

5. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que se F é uma primitiva de f em $[a,b]$,
$$\int_a^b f^2(x)dx = F(b)F'(b) - F(a)F'(a) - \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$