Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame - Correcção - (MEMec; MEAer)

11 de Janeiro de 2010 - 13 horas

I (3,5 val.)

1. i)

Verifiquemos, por indução matemática que $a_{n+1} - a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- $a_2 - a_1 = 3 - 1 \geq 0$.
- $\underbrace{a_{n+1} - a_n \geq 0}_{\text{hip. indução}} \Rightarrow \underbrace{a_{n+2} - a_{n+1} \geq 0}_{\text{tese}}$.

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2\sqrt{a_{n+1}} + 1 - (2\sqrt{a_n} + 1) = 2\frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} \geq 0, \text{ uma vez que}$$

$a_{n+1} - a_n \geq 0,$ da hipótese de indução e $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} \geq 0$ porque $a_n \in [0, 9]$.

ii) A sucessão a_n é monótona, de acordo com (i), e é limitada, uma vez que $a_n \in [0, 9]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo é convergente.

iii)

$$a_n \to a \in [0, 9] \Rightarrow \ a_{n+1} \to a, \text{ e } 2\sqrt{a_n} + 1 \to 2\sqrt{a} + 1$$

$$\text{como } a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 2\sqrt{a} + 1 \Rightarrow a = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{uma vez que } \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Concluí-se, assim, que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + (n!)^{-1/n} = 3 + 2\sqrt{2}$, sendo este valor o único elemento do conjunto dos sublimites da sucessão b_n

II (6,5 val.)

1. i)

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{1/x} = (\text{R.Cauchy}) = \lim_{x\to^-} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to^-} x = 0.$$

Assim

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x\,(\ln(-x) + 1) - 1 = -1 \neq f(0) = \text{arctg}(-1) = -\pi/4.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ 2\ln(-x) + 4 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

A função f não é contínua em $x = 0$ logo tanbém não é diferenciável em $x = 0$.

ii) Como $f'(x) > 0$ a função f é monótona em $\mathbb{R}^+$.

iii) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(-x) + 4 = 0$ para $x < 0$. $f(-e^{-2})$ é o único ponto de estacionaridade em $\mathbb{R}^-$. Sendo $f''(x) = -2/x$ para $x < 0$, $f''(-e^{-2}) < 0$ logo $f(-e^{-2})$ é o único extremo local em $\mathbb{R}^-$, um máximo local.

iv) O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado à função é

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2} = -3 + 4(x+1) - (x+1)^2$$

$$\text{(T.Taylor)}, \ |f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \underset{x,c\in[-11/10,-9/10]}{\text{(r.Lagrange)}} = |f'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}| =$$

$$= |\frac{2}{c^2}\frac{|(x+1)^3|}{3!}| \underset{|x+1|\leq 1/10}{\leq} \frac{1}{3.10^3.c^2} \leq \frac{10^2}{3.10^3.9^2} = \frac{1}{3^5.10}$$

2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\operatorname{sen}(x-3)} = \text{(R.Cauchy)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{\cos(x-3)} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)^{1/x} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)} = e^0 = 1.$$

uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)}{x} = \text{(R.Cauchy)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen}x + x\cos x}{x\operatorname{sen}x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}x + x\cos x}{x\operatorname{sen}x} = \text{(R.Cauchy)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x + x\cos x} =$$

$$= \text{(R.Cauchy)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}x - x\cos x}{2\cos x - x\operatorname{sen}x} = 0.$$

3.

$$x_n \in]-1/2, 1/2[, \text{ sucessão limitada} \overset{\text{(T.Bolzano-Weierstrass)}}{\Rightarrow} x_{n_k} \to c \in [-1/2, 1/2].$$

$$f' \text{ contínua em } [-1/2, 1/2] \Rightarrow f'(x_{n_k}) \to f'(c)$$

$$f'(c) = \lim f'(x_{n_k}) = 0 \ c \text{ é um ponto estacionário de } f.$$

$$\text{Sendo } f''(x) < 0 \text{ para } x \in [-1, 1], \ f''(c) < 0 \Rightarrow f(c) \text{ é máximo de } f.$$

III (3,5 val.)

1. Sejam $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ e $b_n = \frac{1}{n^3}$.

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n^{\frac{7}{2}}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então pelo critério geral de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ são da mesma natureza. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ com $\alpha > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ é convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n!}{n^n}\cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

logo pelo critério de Alembert a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ é convergente e consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n!}{n^n}\cos(n\pi)|$é convergente.

2. i) $R = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{3^n.5^{n+2}}{5^{n+1}.3^{n+1}} = \frac{5}{3}$. A série converge absolutamente em $x \in \mathbb{R}$ tal que $|1-2x| < R = 5/3$, ou seja em $]-1/3, 4/3[$

   ii) A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}(1-2x)^{n+3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-2x)^3}{5}\left(\frac{3(1-2x)}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{(1-2x)^3}{5}.\frac{\frac{3(1-2x)}{5}}{1-\frac{3(1-2x)}{5}} = \frac{3(1-2x)^4}{25}.\frac{5}{2+6x} = \frac{3(1-2x)^4}{5((2+6x)}.$$

IV (6,5 val.)

1.

$$i) \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{4-(\ln t)^2}} = \int_1^e \frac{1/2t}{t\sqrt{1-(\frac{\ln t}{2})^2}}dt = \text{(Barrow)} = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{\ln t}{2}\right)\right]_1^e = \frac{\pi}{6}.$$

$$ii) \int_1^2 t\,\mathrm{arctg}(t)dt = (\text{Int. por partes}) = \left[\frac{t^2}{2}\,\mathrm{arctg}(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}(2) - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{5}{2}\,\mathrm{arctg}(2) - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2} = (\text{Int. por subst.}) = \int_e^{e^2} \frac{dt}{(t-1)^2 t} = .$$

$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}\right) dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{t}dt + \int_e^{e^2} \frac{-1}{t-1}dt + \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)^2}dt = .$$

$$= (\text{Barrow}) = [\ln t]_e^{e^2} - [\ln(t-1)]_e^{e^2} - \left[\frac{1}{t-1}\right]_e^{e^2} = 1 - \ln(e+1) + \frac{e}{e^2-1}.$$

3. A área da região é

$$2\int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)^2}dx = 2\left(\int_0^{1/2} x^{1/2}dx - \int_0^{1/2} x^{3/2}dx\right) = .$$

$$= (\text{Barrow}) = 2\left(\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{1/2}\right) = \frac{7}{30}\sqrt{2}.$$

4. i)

$$G = G_1 \circ f \qquad G(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt, \qquad f(x) = x + x^2$$

$$G'(x) = G_1'(f(x)).f'(x) \text{ (derivada f. composta)}, \; G_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt, \; f(x) = x+x^2$$

$$G'(x) = \frac{(x+x^2)^2}{(x+x^2)^4+1}(1+2x), \text{ (Teorema fundamental do cálculo)}, \; G_1'(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

ii) $CD_G = \{G(x) : x \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{t^2}{t^4+1} \geq 0 \Rightarrow G(x) = \int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1}dt \geq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow G(x) = \int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1}dt = 0$$

$$\text{para}\, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ G'(x) \underset{(G'(x)>0,\ x\neq 0)}{\geq 0 \Rightarrow} G\,(\text{f. crescente}) \ \Rightarrow \underset{\text{para}\, x\in\mathbb{R}^+}{\int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1} dt > 0}$$

5. f é diferenciável $\Rightarrow$ f é contínua e $F'(x) = f(x)$,

$$ii) \int_a^b f(x)f(x)dx = (\text{Int. por partes}) = [f(x)F(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)F(x)dx$$

$$[f(x)F(x)]_a^b = F(b)F'(b) - F(a)F'(a).$$

$$\int_a^b f'(x)F(x)dx = \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$