Cálculo Diferencial e Integral I

2ºExame - (MEMec; MEAer)

25 de Janeiro de 2010 - 13 horas

I (6,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \ln(e + \frac{1}{x}) & \text{se} \quad x > 0 \\ e^{-3x^2-6x+1} & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   i) Determine se existir $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

   ii) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$? Defina a função derivada de f.

   iii) Conclua se a função f tem inversa quando restrita a $\mathbb{R}^+$ e determine se existir, a derivada da função inversa em $e - \ln(2e)$.

   iv) Determine os extremos locais da função f em $\mathbb{R}^-$.

   v) Indique o polinómio de Taylor de 2º grau em potência de $x + 2$ associado à função f.

   vi) Considere as funções contínuas $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $]a, b[$ e $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{-3x^2} f(x)$. Mostre que se $f(a) + f(b) = 0$ e $f(a).f(b) = 0$ existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 6cf(c)$.

II (6,5 val.)

1. Considere as sucessões de termos positivos u_n e v_n, $n \in \mathbb{N}$

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 1 + u_n^{-1}$$

$$v_n = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... + \frac{2^n}{3^{n+1}}.$$

   i) Mostre que a sucessão u_n não é monótona, mas é contractiva.

   ii) A sucessão v_n é convergente? Justifique.

   iii) Determine em $\mathbb{R}$, caso exista, o limite da sucessão $w_n = u_n + v_n$.

2. Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde é convergente a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}(x+2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. Sendo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - 1)$ uma série de termos positivos convergente, qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 - 1}{4 + a_n}$$

Justifique.

III (7 val.)

1. Determine o valor dos integrais

$$i) \int_1^2 \frac{e^x \cos\sqrt{1-e^x}}{\sqrt{1-e^x}} dx, \qquad ii) \int_0^1 \ln(x^2+1) dx.$$

2. Considere a função $F : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^{x^2+1} \frac{\sqrt{2t+t^2}}{t^2} dt$$

   i) Determine $F(1)$.
   Sugestão: Utilize a substituição $\sqrt{2t+t^2} = u + t$.
   ii) Defina a derivada da função F.

3. Determine a área da região plana limitada pelas curvas $y = 2x^2+3$ e $y = -x^2+1$ e as rectas $x = 0$ e $x = 1$.

4. Seja $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, tal que $g(x) \geq 0$.
   i) A função f tem máximo e mínimo em $[a, b]$? Justifique.
   ii) Mostre, sabendo que fg é integrável em $[a, b]$, que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$