Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame - (MEMec; MEEC; MEAmb)

21 de Junho de 2010 - 9 horas

Soluções da prova.

I (3 val.)

1. i)

$$\frac{-1}{2^{2n}n!(n-1)!} \leq u_n \leq \frac{1}{2^{2n}n!(n-1)!}$$

do teorema das sucessões enquadradas vem $u_n \to 0$ dado que $\pm\frac{1}{2^{2n}n!(n-1)!} \to 0$.

$$v_n = \frac{n/2 + \ln n}{3n + \sqrt{n}} = \frac{1/2 + \frac{\ln n}{n}}{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1/6$$

Para justificarmos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, considera-se o limite de funções reais, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (por aplicação da regra de Cauchy), e através da definição de Heine de limite, em particular, tem-se $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

ii) Não. Sendo a sucessão v_n convergente todas as suas subsucessões são convergentes.

2. Seja a sucessão

$$w_1 = 1/2, \qquad w_{n+1} = 1 - e^{-w_n}, \qquad n \geq 1.$$

Mostremos por indução matemática que $0 < w_n < 1\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$w_1 = 1/2 \in]0,1[$.
Fixado n,
provemos que se $0 < w_n < 1$ (hipótese de indução) então $0 < w_{n+1} < 1$ (tese)

Constructivamente, se $0 < w_n < 1$ como $-1 < -w_n < 0$ tem-se que $0 < e^{-w_n} < 1$ vindo $0 < 1 - e^{-w_n} < 1$, isto é $0 < w_{n+1} < 1$.

A proposição anterior dá-nos a existência de pelo menos um majorante e um minorante da sucessão w_n, sendo w_n uma sucessão limitada.

II (7 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\, e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ x - 2\,\mathrm{arctg}(x-1) & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

i) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = (\text{R.Cauchy}) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, não sendo a função f contínua em $x = 1$ também não é diferenciável nesse ponto.
Para $x > 1$, f é diferenciável pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis. De forma analoga conclui-se que a função f também é diferenciável em $x < 1$, e a sua função derivada é definida pela expressão seguinte

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1}\, e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \frac{x(x-2)}{1+(x-1)^2} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

ii) $f'(x) > 0$ em $]2, +\infty[$ logo f é estritamente crescente nesse intervalo. $f'(x) \leq 0$ em $]1, 2]$ logo f é monótona decrescente nesse intervalo. A função é diferenciável em $]1, +\infty[$ e $f'(2) = 0$ sendo $f(2)$ um minimo local.

iii) A função f tem inversa em $]-2, -1[$, uma vez que nesse intervalo é uma função injectiva. ($f'(x) > 0$ em $]-2, -1[$ logo f é estritamente monótona e consequentemente injectiva)

2. i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3\,\mathrm{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2} \right)^2 \frac{x}{\mathrm{sen}(x)} \frac{1}{1+\cos(x)} \right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2} \right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{sen}(x)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = 1^2.1.\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = (\text{R.Cauchy}) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$

ii)

$$\lim_{x\to +\infty} x^{2/\sqrt{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1.$$

uma vez que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = (\text{R.Cauchy}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0.$$

3. Consideremos a função $f(x) = e^x - 3 + x$. Pretende-se mostrar, recorrendo ao teorema de Rolle que a função f tem no máximo um zero em $\mathbb{R}$.
Provemos usando o método de redução ao absurdo. Se a função f tivesse mais do que um zero, sem perda de generalidade, considere-se o caso em que f tem exactamente dois zeros, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Uma vez que a função é contínua em $[x_1, x_2]$, diferenciável em $]x_1, x_2[$ (a função f é representada por uma expressão que resulta da soma de funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$) e $f(x_1) = f(x_2) = 0$, do teorema de Rolle, existe pelo menos um zero da função f' em $]x_1, x_2[$ ($\exists c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$). O que é impossível, uma vez que $f'(x) = e^x + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Assim função f tem no máximo um zero em $\mathbb{R}$ (i.e. a equação $e^x = 3 - x$ tem no máximo uma solução em $\mathbb{R}$).

III (6,5 val.)

1. i)

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}dx = (\text{regra de Barrow}) = \left[\ln|x^2-x-2|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 2 = 0.$$

ii)

$$\int_1^3 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = (\text{Int. por partes}) = \left[-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)x}dx =$$

da aplicação da decomposição em fracções simples

$$= -\frac{\ln 3}{20} + \frac{1}{2}\left(\int_1^3 \frac{1}{(1+x^2)x}dx\right) = -\frac{\ln 3}{20} + \frac{1}{2}\left(\int_1^3 \frac{A}{x}dx + \int_1^3 \frac{Bx+C}{(1+x^2)}dx\right) =$$

onde $A = 1, \ B = -1$

$$= -\frac{\ln 3}{20} + \frac{1}{2}\left(\int_1^3 \frac{1}{x}dx + \int_1^3 \frac{-x}{(1+x^2)}dx\right) =$$

$$= -\frac{\ln 3}{20} + \frac{1}{2}\left(\left[\ln x\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_1^3\right) = -\frac{\ln 3}{20} + \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5\right) = \frac{9\ln 3 - 5\ln 5}{20}.$$

iii) Considere a função $F : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^{\ln x} \left(k_1 e^{-t^2} + \frac{1}{1+e^{-t}}\right)dt$$

i) A função F resulta da composta da função $F_1(x) = \int_1^x f(t)dt$ (onde $f(t) = k_1 e^{-t^2} + \frac{1}{1+e^{-t}}$) e a função $\ln x$.
Do teorema fundamental do Cálculo, uma vez que a função f é contínua em $]-1,1[$, a função F_1 é diferenciável. A função F é diferenciável pois resulta da composição de funções diferenciáveis, sendo

$$F'(x) = \left(k_1 e^{-\ln x^2} + \frac{1}{1+e^{-\ln x}}\right)\frac{1}{x}$$

Como $F'(1) = 0$, tem-se $\left(k_1 e^{-\ln 1^2} + \frac{1}{1+e^{-\ln 1}}\right)\frac{1}{1} = 0$ donde $k_1 = -\frac{1}{2}$.

ii) Utilizando a substituição $e^t = x$ e considerando $k_1 = 0$,

$$F(1) = \int_1^{\ln 1} \frac{1}{1+e^{-t}}dt = -\int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\int_e^1 \frac{1}{x+1}dx = (\text{regra de Barrow}) = -\left[\ln(x+1)\right]_1^e = \ln\frac{e+1}{2}.$$

iv) Calcule a área da região plana situada na região $x \geq 1$ e limitada pelas curvas $y = \ln x/x^2$ e $y = 1/x^2$.
As curvas cruzam-se em $x = e$ na região $x \geq 1$, e $\ln x < 1$ para $1 \leq x \leq e$. O valor da área da referida região é obtido por

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}(1-\ln x)dx = (\text{int. por partes}) =$$

$$= \left[-\frac{1}{x}(1-\ln x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}(-\frac{1}{x})dx = 1 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}.$$

v) Sendo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$ e $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Aplicando a integração por partes,

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \left[xf^2(x)\right]_a^b - \int_a^b f^2(x)dx = 0 - 1 = 1.$$

IV(3,5 val.)

1. i) Para o estudo da natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-5}}{3^{2n}} = \frac{2^{-5}}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

A série é convergente, pois é uma série geométrica, cujo termo geral é uma progressão geométrica de termos positivos de razão (2/9) inferior a 1

ii) Para o estudo da natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}.$$

apliquemos o critério de D'Alembert. Para isso necessitamos, em primeiro lugar, de calcular o seguinte limite onde intervém a sucessão $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(2n+2)^{2n+2}}}{\dfrac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{(2n)^{2n}}{(2n+2)^{2n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+1/2n}{1+1/n} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^2} = 1/e^2 < 1$$

satisfeitas as condições do critério acima referido conclui-se que a série é convergente.

2. i) O raio de convergência, R, da série de potências $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$, com $a_n = \frac{1}{(n^2+n)3^n}$ é obtido por

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)^2+n+1)\,3^{n+1}}{(n^2+n)\,3^n} = 3$$

Assim a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ é absolutamente convergente para os valores de x, que verificam a condição $|x-1| < 3$. O maior intervalo aberto onde a série de potências é absolutamente convergente é $]0,4[$

ii) A série de potências $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ para $x=4$ é a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$. Reescrevendo o seu termo geral, tem-se uma série de Mengoli do tipo

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n - u_{n+1}$, onde $u_n = \frac{1}{n}$. Trata-se de uma série de Mengoli convergente uma vez que u_n converge. A soma da série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1} = u_1 - \lim_{k\to+\infty} u_{k+1} = 1$$

3. Sendo a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos positivos divergente então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ é divergente.

   Se assim não fosse, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ seria convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seria divergente.

   Ora sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ convergente

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \to 0$$

   o que conduzia a $a_n \to 0$ e a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = \lim_{n\to+\infty} (1+a_n) = 1$.

   Consequentemente pelo critério de comparação deduzia-se que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ tinham a mesma natureza, o que contradiz o suposto.
   Assim a afirmação inicial é uma proposição verdadeira.