Cálculo Diferencial e Integral I

1ºExame - (MEMec; MEEC; MEAmb)

21 de Junho de 2010 - 9 horas

I (3 val.)

1. Considere as sucessões

$$u_n = \frac{(-1)^n\, n}{2^{2n}(n!)^2} \qquad\qquad v_n = \frac{n/2 + \ln n}{3n + \sqrt{n}}$$

.

   i) Determine os limites das sucessões.

   ii) A sucessão v_n tem subsucessões divergentes? Justifique.

2. Seja a sucessão

$$w_1 = 1/2, \qquad w_{n+1} = 1 - e^{-w_n}, \qquad n \geq 1.$$

   Mostre por indução matemática que $0 < w_n < 1$ e consequentemente que a sucessão w_n é limitada.

II (7 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\, e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ x - 2\operatorname{arctg}(x-1) & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

   i) Defina a função derivada de f.

   ii) Analise em $]1, +\infty[$ a monotonia da função f e a existência de extremos.

   iii) A função f tem inversa em $]-2, -1[$? Justifique.

2. Determine, se existirem em $\bar{\mathbb{R}}$, os limites

$$\text{i)} \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3 \operatorname{sen}(x)} \qquad\qquad \text{ii)} \ \lim_{x\to +\infty} x^{2/\sqrt{x}}$$

3. Conclua, recorrendo ao teorema de Lagrange, se a equação

$$e^x = 3 - x$$

   tem em $\mathbb{R}$ uma única solução.

III (6,5 val.)

1. Determine o valor dos integrais

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}dx, \qquad ii) \int_1^3 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

2. Considere a função $F : [1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^{\ln x} \left(k_1 e^{-t^2} + \frac{1}{1+e^{-t}} \right) dt$$

   i) Determine $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $F'(1) = 0$.

   ii) Utilizando a substituição $e^t = x$ determine para $k_1 = 0$ o valor de $F(1)$.

3. Calcule a área da região plana situada na região $x \geq 1$ e limitada pelas curvas $y = \ln x/x^2$ e $y = 1/x^2$.

4. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$ e $\int_a^b f^2(x)dx = 1$ em $[a, b]$. Determine justificando o valor do integral $\int_a^b xf(x)f'(x)dx$

IV(3,5 val.)

1. Analise a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-5}}{3^{2n}}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}.$$

2. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n^2+n)3^n}$$

   i) Indique o maior intervalo aberto onde a série é absolutamente convergente

   ii) Determine a soma da série quando $x = 4$.

3. Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos positivos é divergente o que pode concluir quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.