Cálculo Diferencial e Integral I

2ºExame - (MEMec; MEEC; MEAmb)

7 de Julho de 2010 - 9 horas

I (3 val.)

1. Considere as sucessões

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{n^2}; \qquad v_n = \frac{b^{2n+1}}{b^{2n}+1} \qquad b \in \mathbb{R}$$

i) A sucessão u_n é limitada? A sucessão u_n é convergente? Justifique.

ii) Indique justificando quais os valores de b para os quais a sucessão v_n tem todas as subsucessões convergentes.

2. Seja a sucessão

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1, \qquad a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2, \qquad n \geq 2.$$

i) Mostre que se para $n \geq 2$, $a_{n-1} = (n-2)^2$ e $a_n = (n-1)^2$ então $a_{n+1} = n^2$.

ii) Mostre por indução matemática que $a_n = (n-1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) A sucessão a_n é convergente? Justifique.

II (7 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (e^{2x}-1)\,/\,(e^{2x}+1) & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ x - \ln(x^2+1) & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

i) Defina a função derivada de f.

ii) Analise em $]-\infty, 1]$ a monotonia da função f e a existência de extremos.

iii) Determine o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de x associado à função f no intervalo $[-1, 1]$.

2. Determine, se existirem em $\bar{\mathbb{R}}$, os limites

$$\text{i)} \ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(x)} \qquad \text{ii)} \ \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(1-x)}$$

3. Considere a equação $x^4 + x^2 - 4x + 1 = 0$

i) Mostre que a equação tem uma solução $x_0 \in]0,1[$ e uma solução $x_1 \in]1,2[$.

ii) Mostre que x_0 e x_1 são as únicas soluções da equação.

III (6,5 val.)

1. Determine o valor dos integrais utilizando em ii) a substituição $\sqrt{x-1}=t$.

$$\text{i)} \int_2^3 \frac{x+1}{x^2-x}dx, \qquad \text{ii)} \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}dx.$$

2. Considere a função $G:[\frac{1}{2},3]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$G(x)=\frac{x^3}{3}-\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^2\ln t dt$$

   i) Determine $G(1)$.

   ii) A função G tem extremos no domínio? Justifique.

3. Calcule a área da região plana limitada pelo gráfico da função $f(x)=\operatorname{arctg} x$ pelas rectas $x=1$ e $y=0$.

4. Sendo $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\int_x^{x+1}\operatorname{sen}(e^t)dt$. Mostre que

$$e^x|f(x)|\leq 2$$

(Sugestão: Utilize a substituição $t=\ln u$ e o método de integração por partes)

IV(3,5 val.)

1. Analise a natureza das séries numéricas

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n+1}(n^3+1)}; \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{n!+2}.$$

2. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

   i) Indique o intervalo de $\mathbb{R}$ para o qual a série é convergente.

   ii) Determine a soma da série quando $x=1/2$.

3. Seja a_n uma sucessão de termos reais convergente para $a\neq 0$. As séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)$ são convergentes? Justifique.