Cálculo Diferencial e Integral I

2ª Ficha de problemas

Sucessões de números reais

---

1. Seja a_n o termo geral de uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

   a) Justifique que a sucessão é convergente e indique um intervalo (de comprimento tão pequeno quanto possível) que contenha o limite de qualquer sucessão que satisfaça as condições impostas a a_n.

   b) Indique o supremo e o ínfimo do conjuntos dos termos da sucessão; este conjunto terá máximo? E mínimo? Justifique abreviadamente as respostas.

2. Justifique que se, as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, u_n é convergente. Mostre ainda, recorrendo à definição de limite, que o limite de u_n, não pode ser um número negativo.

3. Considere a sucessão x_n,

$$x_1 = \frac{3}{2} \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

   a) Recorrendo ao princípio de indução matemática, verifique que $1 < x_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Mostre que a sucessão é decrescente.

   c) A sucessão x_n é convergente? Justifique.

4. Sendo x_n uma sucessão de números reais não negativos que converge para $x > 0$. Mostre que a sucessão $\sqrt{x_n}$ converge e que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

5. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

$$a)\frac{n^2-1}{n^4+3}, \quad b)\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}, \quad c)\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p)}{(n+1)(n+2)...(n+q)}, \quad d)(1+\frac{1}{n^3})^{n^2}, \quad e)\frac{a^n b^n}{a^n+b^n}; \; a,b \in \mathbb{R}^+$$