



Cálculo Diferencial e Integral I

3ª Ficha de problemas

Sucessões de números reais

1. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n :

$$a) \frac{n^n}{3^{n n!}}, \quad b) \frac{3^n}{n^2}, \quad c) \frac{n^{80} + n!}{n^n + 50n!}, \quad d) \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$$

2. a) Mostre que se u_{2n} converge para $a \in \mathbb{R}$ e u_{2n+1} converge para $b \in \mathbb{R}$, então a e b são os únicos sublimites de u_n .

b) Mostre que se u_{2n} , u_{2n+1} , u_{3n} são convergentes então u_n é convergente.

3. Verifique se as sucessões u_n , v_n e w_n são limitadas. Estude-as do ponto de vista da convergência e determine, caso existam, os seus sublimites:

$$a) u_n = \cos(n!\pi), \quad b) v_n = \frac{n \cos(n\pi)}{2n+1}, \quad c) w_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

4. Considere as sucessões x_n e y_n , tais que x_n é uma sucessão monótona, y_n é uma sucessão limitada e que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Mostre que a sucessão x_n é limitada.

b) Mostre que as sucessões x_n e y_n são convergentes e que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$$

5. Considere a sucessão de termos positivos, x_n , definida por

$$x_1 = 3 \quad x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{x_n+3}$$

a) Mostre que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{6|x_{n+1} - x_n|}{(x_n+3)(x_{n+1}+3)}.$$

b) Mostre que existe $0 < c < 1$ tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$.
(x_n é uma sucessão contractiva).

c) Sendo x_n convergente, determine o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.