



Cálculo Diferencial e Integral I

4ª Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Continuidade e limites.

1. Sendo f uma função definida em \mathbb{R} e tal que $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$ onde $I_{\mathbb{R}}$ designa a aplicação idêntica de \mathbb{R} em si mesmo ($I_{\mathbb{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$).

a) Recorrendo directamente às definições de aplicação injectiva e sobrejectiva, prove que f é necessariamente bijectiva.

b) Mostre, por meio de exemplos, que uma função f nas condições acima indicadas pode ser:

i) contínua em todos os pontos de \mathbb{R}

ii) contínua num único ponto de \mathbb{R}

iii) descontínua em todos os pontos de \mathbb{R}

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}$$

3. Considere a função f , definida no intervalo $] - 1, 1[$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$$

a) calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou minorada e se tem máximo ou mínimo em $] - 1, 1[$.

c) Se x_n for uma sucessão convergente para 1, com termos em $] - 1, 1[$, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.

d) Dê um exemplo de uma sucessão y_n , de termos em $] - 1, 1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

4. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) = 1$