# Cálculo Diferencial e Integral I

**5ª Ficha de problemas**

Funções reais. Continuidade e limites. Derivadas

---

1. Sendo $f$ a função definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}x) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \mathrm{arcsen}(x) & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 \quad \text{se} \quad x \leq -1. \end{cases}$$

   a) Determine $a$.
   b) Determine $f(\frac{4}{\pi}\arccos(-\frac{4}{5}))$ e $f(\cos(\frac{5\pi}{12}))$.
   c) Estude a função $f$ do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função $f$. Indique ainda se a função tem máximo, mínimo, supremo ou ínfimo (em todo o seu domínio) e, no caso de existência, indique o seu valor.
   d) Diga se existem e, no caso de existência, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

2. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, uma função contínua, justifique que:

   a) não existe qualquer sucessão $x_n$ (de termos em $[0,1]$) tal que $g(x_n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   b) se existe uma sucessão $x_n$ (de termos em $[0,1]$) tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

3. Seja $f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, uma função contínua, verificando a condição $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

   a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1,1]$? Justifique.
   b) Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \mathrm{tg}(f(u_n))$, em que $u_n = \frac{1-n}{n}$.

4. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \qquad b)\ g(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}, \qquad c)\ h(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2).$$