



Cálculo Diferencial e Integral I

7ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciação

1. Determine os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen} x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$$

2. Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 e^{\ln^2 x}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{coth} x}$$

3. Seja $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) + 1$

- Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x .
- Determine um majorante para o erro que se comete em $[-1/2, 1/2]$ ao aproximar f pelo polinómio indicado em a).

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais em α e β , com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.

Escreva a fórmula de Taylor para g e com resto (de Lagrange) de segunda ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

5. Seja f , definida em \mathbb{R} , tal que $f(x) = |x|e^{1-x^2}$

- Estude a função do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.
- Complete o estudo da função, considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões e assíntotas. Esboce o gráfico da função.