Cálculo Diferencial e Integral I

Texto de apoio às aulas.

Amélia Bastos, António Bravo

Dezembro 2010

Capítulo 1

Números reais

As propriedades do conjunto dos números reais têm por base um conjunto restrito de propriedades básicas estabelecidas por axiomas que levam a designar o conjunto dos números reais, com as operações de adição e multiplicação, por corpo ordenado completo. Sem ter por objectivo a construção de todo o edifício do conjunto dos números reais vai-se, neste primeiro capítulo, indicar as referidas propriedades básicas, estabelecidas nos axiomas de corpo e de ordem, e dar particular importância ao axioma da completude e a algumas das suas consequências. Vai-se ainda analisar o subconjunto dos números reais designado por conjunto dos números naturais e o princípio de indução matemática, princípio que constitui um instrumento importante para estabelecer propriedades envolvendo a variável natural.

1.1 Axiomas de corpo e de ordem

Considere-se um conjunto designado por $\mathbb{R}$ cujos elementos se designam por números reais e duas operações binárias:

- A operação adição

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ^{1} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to x + y$$

- A operação multiplicação

$$. : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to x.y$$

[1] $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$ é por definição o produto cartesiano de A por B.

Vai-se estabelecer para $(\mathbb{R}, +, .)$ recorrendo a axiomas, proposições que não podem ser deduzidas a partir de outras mais elementares, propriedades algébricas e propriedades de ordem.

Axiomas de corpo

Axioma 1. *A adição e a multiplicação são operações comutativas em* $\mathbb{R}$.

$$x + y = y + x \qquad x.y = y.x \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Axioma 2. *A adição e multiplicação são operações associativas em* $\mathbb{R}$.

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (x.y).z = x.(y.z) \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Axioma 3. *A adição e a multiplicação são operações com elementos neutros que são números reais distintos i.e.*

$$\underset{u\in\mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \ x + u = x \qquad \underset{v\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\exists} \ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} \ y.v = y$$

Axioma 4.

- *Todo o número real tem simétrico i.e.*

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} \ x + y = u$$

- *Todo o número real distinto de u tem inverso i.e.*

$$\underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\forall} \ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} \ x.y = v$$

Axioma 5. *A multiplicação é distributiva a respeito da adição.*

$$x.(y + z) = x.y + x.z \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R}$ é um grupo comutativo relativamente à adição e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ um grupo comutativo relativamente à multiplicação.

Qualquer terno constituido por um conjunto e duas operações designadas por adição e multiplicação que verificam os cinco axiomas anteriores é um corpo. $(\mathbb{R}, +, .)$ é um corpo.

Os chamados axiomas de corpo estabelecem as propriedades algébricas básicas de $\mathbb{R}$. Dos axiomas de corpo podem deduzir-se as propriedades algébricas dos números reais. Vejamos alguns exemplos simples de como deduzir essas propriedades.

i) *Unicidade do elemento neutro.*
Admita-se que existem dois elementos neutros u e u'. Tem-se

$$\underset{u\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x+u=x \underset{x=u'}{\Rightarrow} u'+u=u'$$

e por outro lado

$$\underset{u'\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x+u=x \underset{x=u}{\Rightarrow} u+u'=u$$

vindo do axioma 1, que $u = u'$. O elemento neutro é pois único e representa-se por 0.
Analogamente no caso da multiplicação se pode concluir que o elemento neutro é único e se representa por 1.

ii) *Unicidade do simétrico.*
Sejam y, y' simétricos de x, $x + y = 0$ e $x + y' = 0$,

$$y' = y' + 0 = y' + (x + y) = (y' + x) + y = 0 + y = y \Rightarrow y = y'$$

O elemento simétrico de x é único e representa-se por $-x$.
Também na multiplicação o elemento inverso é único e representa-se por x^{-1}.

iii) *Lei do corte para a adição.*
Mostre-se que

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z \qquad\qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Adicionando $(-x)$ a ambos os membros do antecedente da implicação anterior tem-se

$$(-x)+(x+y) = (-x)+(x+z) \Leftrightarrow ((-x)+x)+y = ((-x)+x)+z \Leftrightarrow 0+y = 0+z$$

vindo $y = z$.

iv) *A equação $a + x = b$ tem solução única.*
Seja $x = (-a) + b$. Tem-se

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$

consequentemente $x = (-a)+b$ é solução da equação indicada. A solução é única pois de $a + x = b$ e $a + x_1 = b$ tem-se $a + x = a + x_1$ vindo pela lei do corte para a adição $x = x_1$.

v) *O elemento* 0 *é absorvente na multiplicação.*
Seja $x \in \mathbb{R}$. Tem-se por um lado $x = x + 0$ e por outro

$$x = x.1 = x.(1+0) = x.1 + x.0 = x + x.0$$

Assim da lei do corte para a adição conclui-se que $x.0 = 0$.

Definição 1.1.1. *A subtracção é a operação binária que associa a cada par ordenado* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *o número real* $x + (-y)$.

Definição 1.1.2. *A divisão é a operação binária que associa a cada par ordenado* $(x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *o número real* $x.y^{-1}$ *(habitualmente representado por* $\dfrac{x}{y}$ *).*

Seja o subconjunto de $\mathbb{R}$ designado por $\mathbb{R}^+$ cujos elementos se designam por números reais positivos e defina-se o subconjunto de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \,:\, -a \in \mathbb{R}^+\}$$

designado por conjunto dos números reais negativos.

Axiomas de ordem

Axioma 6. $\mathbb{R}^+$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$ *para a adição e multiplicação i.e.*

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \;\; e \;\; a.b \in \mathbb{R}^+.$$

Axioma 7. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *uma e só uma das proposições seguintes é verdadeira*

$$a \in \mathbb{R}^+ \;; \qquad a = 0 \;; \qquad -a \in \mathbb{R}^+.$$

i.e. qualquer número real distinto de 0 *é real positivo ou real negativo e nenhum real é positivo e negativo.*

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \qquad e \qquad \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset.$$

As propriedades de ordem dos números reais podem ser deduzidas a partir destes axiomas.

Definição 1.1.3. *Relação menor em* $\mathbb{R}$ *é por definição uma relação de ordem* R, $x < y$, *tal que:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \; y + (-x) \in \mathbb{R}^+\} \tag{1.1.1}$$

Convenciona-se que $x < y$ é equivalente a $y > x$, i.e. y maior que x. Se $a \in \mathbb{R}^+$ ($-a \in \mathbb{R}^+$) diz-se que a é um número real positivo (negativo) e escreve-se $a > 0$ ($a < 0$).

A relação menor verifica evidentemente as propriedades das relações de ordem

Propriedade Tricotómica

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ verifica-se uma e só uma das proposições

$$x < y \quad ; \quad x > y \quad ; \quad x = y$$

De facto do axioma 7 para $y + (-x) \in \mathbb{R}$, tem-se $y + (-x) \in \mathbb{R}^+$ ou $y + (-x) \in \mathbb{R}^-$ ou $y + (-x) = 0$.

Propriedade Transitiva

Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ se $x < y$ e $y < z$ tem-se $x < z$.

De facto sendo $y + (-x) \in \mathbb{R}^+$ e $z + (-y) \in \mathbb{R}^+$ tem-se $z + (-x) \in \mathbb{R}^+$ pois

$$((z + (-y)) + (y + (-x))) + x = (z + (-y)) + ((y + (-x)) + x) = z$$

vindo pelo axioma 6

$$z + (-x) = (z + (-y)) + (y + (-x)) \Rightarrow z + (-x) \in \mathbb{R}^+$$

O teorema seguinte, que se apresenta sem demonstração, mostra a compatibilidade entre a relação de ordem indicada e as operações algébricas. $(\mathbb{R}, +, .)$ é um corpo ordenado.

Teorema 1.1.4. *Quaisquer que sejam $x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$*

i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ *(monotonia da adição);*

ii) $x < y \wedge u < v \Rightarrow x + u < y + v$

iii) $x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$
$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz$ *(monotonia parcial da multiplicação).*

Como aplicação ordenem-se alguns elementos de $\mathbb{R}$. Em particular

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

De facto

i) $0 < 1$
Tem-se: $0 < 1 \vee 1 < 0 \vee 0 = 1$. Ora $0 = 1$ é impossível.
Por outro lado se $1 < 0$ tem-se $1.1 > 0.1$ ou seja $1 > 0$, o que é absurdo pois $1 < 0$.

ii) Sendo $0 < 1$ tem-se que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $0 + x < 1 + x$ vindo $x < x + 1$.
Assim representando $1 + 1$ por 2, $2 + 1$ por 3, $3 + 1$ por 4 tem-se $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$ e aplicando a propriedade transitiva $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.
Por outro lado $-1 < 0$ já que de $0 < 1$ e pela monotonia da adição se tem $(-1) + 0 < (-1) + 1$. Assim $(-1) + (-1) < 0 + (-1)$, e uma vez que $(-1) + (-1) = -(1 + 1)$, tem-se $-(1 + 1) < -1$ e $-2 < -1$.

1.2 O conjunto $\mathbb{N}$. Indução Matemática

Comece-se por definir $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais.

Definição 1.2.5. *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto indutivo se e só se*

i) $1 \in S$.

ii) Se $a \in S$ então $a + 1 \in S$.

Exemplo 1.2.6.

i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ *são conjuntos indutivos.*

ii) $\{1\}$ *não é um conjunto indutivo.*

Um número real é um número natural se e só e se pertence a qualquer conjunto indutivo de números reais. O conjunto de todos os números naturais representa-se por $\mathbb{N}$.

Definição 1.2.7. *O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é a intersecção de todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$.*

Como consequência desta definição em particular tem-se

i) $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$.

ii) Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 < a < 2$. Tem-se que $a \notin \mathbb{N}$.

Considere-se

$$S_1 = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2\}$$

De facto S_1 é indutivo concluindo-se que $\mathbb{N} \subset S_1$. Ora S_1 não contém a, assim $\mathbb{N}$ não contém a nem nenhum número real entre 1 e 2.

Proposição 1.2.8. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *de todos os números naturais é um conjunto indutivo.*

Demonstração.

i) $1 \in \mathbb{N}$.

ii) Seja $k \in \mathbb{N}$. Então k pertence a qualquer conjunto indutivo S. Para cada conjunto indutivo se k é um elemento também $k+1$ o é. Assim $k+1$ pertence a qualquer conjunto indutivo e consequentemente $k+1 \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ tem a propriedade (ii).

Assim $\mathbb{N}$ é indutivo. ■

A proposição anterior assegura que a intersecção de conjuntos indutivos é um conjunto indutivo. O teorema seguinte assegura que qualquer conjunto indutivo de números naturais é o conjunto $\mathbb{N}$.

Teorema 1.2.9 (Princípio de indução matemática)**.** *Se S é um conjunto indutivo de números naturais então $S = \mathbb{N}$.*

Demonstração.
Se S é um conjunto indutivo sabe-se da definição de conjunto dos números naturais que $\mathbb{N}$ está contido em S ($\mathbb{N} \subset S$).
Uma vez que S é constituido por números naturais segue-se que S está contido em $\mathbb{N}$ ($S \subset \mathbb{N}$).
Conclui-se assim que $S = \mathbb{N}$. ■

Corolário 1.2.10. $\mathbb{N}$ *é o único conjunto indutivo contido nele próprio.*

Vejamos como aplicar o princípio de indução matemática na prática.

Exemplo 1.2.11. *Mostre-se que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Seja S o conjunto dos naturais para os quais a fórmula anterior se verifica i.e.

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

Mostre-se que S é indutivo.
• $1 \in S$ (a formula é verdadeira para $n = 1$).
• Seja $m \in S$. Atendendo à definição de S, a fórmula é verdadeira para $n = m$.

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Some-se $m + 1$ ao primeiro membro da igualdade anterior

$$1+2+\ldots+m+(m+1) = \frac{m(m+1)}{2}+(m+1) = (m+1)(\frac{m}{2}+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

A formula é também válida para $n = m + 1$.
Assim $m + 1 \in S$ se $m \in S$. S é um conjunto indutivo de números naturais e consequentemente $S = \mathbb{N}$. A fórmula verifica-se para todos os naturais.

O teorema 1.2.9 é a base para introduzir uma técnica de demonstração de propriedades em $\mathbb{N}$ designada por princípio de indução matemática. Demonstrar que a propriedade P é verdadeira em $\mathbb{N}$ reduz-se a:

i) Mostrar que $P(1)$ é verdadeira.

ii) Se $P(m)$ é verdadeira para $m \in \mathbb{N}$ mostrar que $P(m + 1)$ é verdadeira.

Exemplo 1.2.12. *Mostre-se que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$*

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

i) Mostre-se que a proposição é verdadeira para $n = 1$

$$1 + r + = \frac{1 - r^2}{1 - r} = 1 + r$$

ii) Sendo $P(m)$ uma proposição verdadeira para $n = m$ mostre-se que $P(m + 1)$ é uma proposição verdadeira.

$$1+r+r^2+\ldots+r^m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \Rightarrow 1+r+r^2+\ldots+r^m+r^{m+1} = \frac{1-r^{m+2}}{1-r}$$

Adicionando r^{m+1} a ambos os membros da equação, hipótese de indução, tem-se

$$1+r+r^2+\ldots+r^m+r^{m+1} = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} + r^{m+1}$$

que é uma proposição verdadeira.

1.3 Axioma do supremo

Os sete axiomas de corpo estabelecidos são verificados quer por $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ quer por outros conjuntos. O axioma do supremo é fundamental para caracterizar completamente $\mathbb{R}$ sendo conhecido como o axioma da continuidade ou da completude.

Antes de se introduzir o axioma do supremo veja-se algumas definições.

Definição 1.3.13. *Seja $S \subset \mathbb{R}$*
M é um majorante de S se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.
m é um minorante de S se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.
S é limitado superiormente ou majorado se tem majorantes.
S é limitado inferiormente ou minorado se tem minorantes.
S é limitado se for limitado superiormente e inferiormente.

Definição 1.3.14. *d é mínimo de S se $d \in S$ e d é minorante de S.*
c é máximo de S se $c \in S$ e c é majorante de S.

Definição 1.3.15. *Sendo V o conjunto dos majorantes de S ($V = \emptyset$ se S não for majorado) designa-se por supremo de S, $\sup S$, o elemento mínimo de V.*

Designa-se por *infimo* de S, $\inf S$, o máximo do conjunto dos minorantes de S.

Axioma 8 (Axioma do supremo)**.** *Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e majorado tem supremo em $\mathbb{R}$.*

Assim $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, +, .)$ é um corpo ordenado completo

Exemplo 1.3.16. *Determine-se o supremo de*

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1 - 1/m, \ m \in \mathbb{N}\}$$

Verifique-se que 1 é supremo de S.

- $1 - 1/m \leq 1$ pois $m \in \mathbb{N}$. Assim 1 é majorante.
- 1 é supremo.
  Seja $\epsilon_1 = 1 - \epsilon$ em que $1 > \epsilon > 0$. Existe $x \in S \ : \ x > 1 - \epsilon$ já que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 - 1/m > 1 - \epsilon \Leftrightarrow 1/m < \epsilon \Leftrightarrow m > 1/\epsilon$.

A ideia usada no exemplo anterior é a base de um resultado geral para caracterizar supremos de conjuntos.

Proposição 1.3.17. *Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. O número real s é supremo de S se e só se*

i) $\underset{x \in S}{\forall} \ x \leq s$

ii) $\underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{x \in S}{\exists} \ x > s - \epsilon$

Demonstração.

- Mostre-se que:

(i),(ii) $\Rightarrow$ s é supremo.
Faça-se a demonstração da proposição anterior por contradição.
Suponha-se que se tem (i),(ii) e existe s_0 um majorante de S tal que $s_0 < s$.
Seja $\epsilon = s - s_0$. De (ii) existe $x \in S$ tal que

$$x > s - (s - s_0)$$

i.e. $x > s_0$ e s_0 não é majorante. Assim tem-se uma contradição e s é supremo.

- Mostre-se que:

s é supremo $\Rightarrow$ (i),(ii).
Se s é supremo então, é majorante ou seja tem-se (i) e por outro lado qualquer que seja $\epsilon > 0$, $s - \epsilon$ não é majorante ou seja quando $\epsilon > 0$ existe $x > s - \epsilon$. ■

Análogamente se mostra

Proposição 1.3.18. *Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. O número real r é infímo de S se e só se*

i) $\underset{x \in S}{\forall} \ : \ x \geq r$

ii) $\underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{x \in S}{\exists} \ : \ x < r + \epsilon$

Os resultados anteriores permitem concluir

Proposição 1.3.19. *Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e minorado tem infimo em $\mathbb{R}$.*

Demonstração.
Sendo $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e minorado $-X$, constítuido pelos simétricos dos elementos de X, é não vazio e majorado e

$$-\sup(-X) = \inf X$$

De imediato do axioma do supremo tem-se o resultado. ■

Analise-se duas consequências directas do axioma do supremo fazendo intervir o conjunto $\mathbb{N}$.

Proposição 1.3.20. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado.*

Demonstração.
Sendo $s = \sup \mathbb{N}$ tem-se:

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} \ : \ m \leq s$$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \ : \ n > s - \epsilon$$

Em particular seja $\epsilon = 1$. Tem-se $n > s - 1$ e consequentemente $n + 1 > s$. Como $\mathbb{N}$ é indutivo $n + 1 \in \mathbb{N}$ e s não é supremo de $\mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3.21 (Propriedade arquimediana)**.** *Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ma > b$.*

Demonstração.
$\mathbb{N}$ não é majorado consequentemente $\underset{m\in\mathbb{N}}{\exists} \ : \ m > b/a$. Assim sendo $a > 0$ tem-se $am > b$. ■

1.4 Densidade dos conjuntos dos números racionais e irracionais em $\mathbb{R}$

Em $\mathbb{R}$ existem subconjuntos importantes para além do conjunto $\mathbb{N}$.

Definição 1.4.22. *O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é por definição*

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee -x \in \mathbb{N}\}$$

Definição 1.4.23. *O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é por definição*

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \ x = p.q^{-1} \ \ p, q \in \mathbb{Z}, \ \ q \neq 0\}$$

Naturalmente se coloca a questão de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser ou não um conjunto vazio. O axioma do supremo apresentado na secção anterior permite responder a esta questão.

Proposição 1.4.24.

i) Nenhum número racional é solução de $x^2 = 2$.

ii) Existe pelo menos um número real que é solução de $x^2 = 2$.

Demonstração.

i) Seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Considere-se $r > 0$ pois $(-x)^2 = x^2$.
Tem-se

$$r = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \mathbb{N}, \quad p, q \quad \text{primos entre si}$$

De $r^2 = 2$ tem-se

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p \quad \text{é par} \Rightarrow \underset{k \in \mathbb{N}}{\exists} \ p = 2k$$

Assim

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \quad \text{é par}$$

É impossível p e q serem pares pois p e q são primos entre si. Não existe solução da equação em $\mathbb{Q}$

ii) Seja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \wedge x^2 < 2\}$$

• $A \neq \emptyset$ uma vez que $1 \in A$.

• A é majorado ($x < 2$ qualquer que seja $x \in A$ pois se $x \geq 2$ tem-se $x^2 \geq 2^2 > 2$ e $x \notin A$).
Do axioma do supremo conclui-se que existe um número real $s = \sup A$ e como $1 \in A$, $s \geq 1$.
Ora pela propriedade tricotómica

$$s^2 < 2 \quad \vee s^2 > 2 \quad \vee s^2 = 2.$$

Por absurdo, usando a propriedade arquimediana pode mostrar-se, [1] que não se tem $s^2 > 2$ nem $s^2 < 2$. Tem-se pois $s^2 = 2$ em que

$$s = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \wedge x^2 < 2\}$$

representando-se s por $\sqrt{2}$.

■

Teorema 1.4.25 (Propriedade de densidade)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Existe um número racional u e um número irracional v tais que $u, v \in]a, b[$.*

Demonstração.

• Considere-se $a = 0$. A propriedade arquimediana garante a existência de $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$m.b > 1 \qquad n.b > \sqrt{2}$$

Nestas condições sendo

$$r = \frac{1}{m} \quad ; \qquad s = \frac{\sqrt{2}}{n}$$

r é um número racional e s irracional tais que

$$r, s \in]0, b[$$

• Considere-se $a > 0$. Procure-se um racional $u \in]a, b[$ partindo da existência de um racional no intervalo de extremo inferior zero. Fazendo $c = b - a$ existe $r \in]0, c[$, $r \in \mathbb{Q}$. Ora

$$r < c = b - a \Rightarrow a + r < b$$

Seja

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \ k.r > a\}$$

Como $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$ o conjunto A tem elemento mínimo $k_0 = \min A$. Seja

$$u = k_0.r$$

Tem-se $u \in \mathbb{Q}$ ($r \in \mathbb{Q}, k_0 \in \mathbb{N}$) e $a < u < b$ já que como $k_0 \in A$, $u = k_0.r > a$. Por outro lado dado que $k_0 - 1 \notin A$

$$(k_0 - 1)r \leq a \Rightarrow u = k_0.r \leq a + r \underset{a+r<b}{\Rightarrow} u < b.$$

Para obter um número irracional $v \in]a, b[$ repete-se o processo substituindo r por $s \in]0, c[$ número irracional. Designando k_0 o minimo do conjunto dos naturais k tais que $k.s > a$ e sendo $v = k_0.s$ tem-se que v é um numero irracional e $v \in]a, b[$. ■

Definição 1.4.26. *Um conjunto X diz-se um conjunto finito, com m elementos se existir uma bijecção*[2] *do conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ sobre X. Designa-se por conjunto infinito qualquer conjunto que não é finito.*

[2]uma bijecção é uma aplicação $\varphi : A \to B$, que é injectiva ($a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, $a_1, a_2 \in A$) e sobrejectiva ($\varphi(A) = \{\varphi(a) : a \in A\} = B$)

Teorema 1.4.27. *Em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ não degenerado $]a, b[$, $a < b$, existe um conjunto infinito de números racionais e um conjunto infinito de números irracionais i.e os conjuntos $]a, b[\cap \mathbb{Q}$ e $]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ são conjuntos infinitos.*

Demonstração.
Mostre-se que $X =]a, b[\cap \mathbb{Q}$ é um conjunto infinito.
Do teorema 1.4.25 X é não vazio. Admita-se que é um conjunto finito. X teria minimo, $c = \min X$, e máximo, $d = \max X$. Sendo $X \subset]a, b[$

$$a < c \leq d < b$$

e

$$X \subset [c, d]$$

Assim qualquer número racional pertencente a $]a, b[$ pertencia a $[c, d]$ não existindo qualquer número racional em $]a, c[$ e $]d, b[$ em contradição com o teorema 1.4.25.
Analogamente se mostra que $]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ é um conjunto infinito. ■

1.5 Exercícios

1.5.1 Exercícios resolvidos

Exerc 1.5.1. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ mostre a desigualdade triangular*

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad ^{3}$$

Resolução.

• Se $a, b \geq 0$, $a + b \geq 0$ e

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|$$

• Se $a, b \leq 0$, $a + b \leq 0$

$$|a+b| = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

• Se $a \leq 0$ e $b \geq 0$ e

$$a + b = -|a| + |b| \Rightarrow |a+b| = |-|a| + |b|| \leq |a| + |b|$$

• Se $a \geq 0$, $b \leq 0$ e

$$a + b = |a| + (-|b|) \Rightarrow |a+b| = ||a| - |b|| \leq |a| + |b|$$

■

Exerc 1.5.2. *Considere o seguinte conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| - x^2 + 2 > 1\}$. Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto A.*

Resolução.

$$|x| > x^2 - 1 \Leftrightarrow x > x^2 - 1 \ \vee \ x < 1 - x^2$$

$$x^2 - x - 1 < 0 \ \vee \ x^2 + x - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\ \vee \ x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

$$A = \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

A é um conjunto majorado, minorado e não vazio. Do axioma do supremo tem-se a existência de supremo e infimo do conjunto A sendo $\sup A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\inf A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Uma vez que $\sup A \notin A$ e $\inf A \notin A$ o conjunto A não tem máximo nem minimo. ■

[3] Seja $x \in \mathbb{R}$. Designa-se por módulo de x a expressão $|x|$. Por definição $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Se $c \in \mathbb{R}^+$ a proposição, $|x| < c$ é equivalente a $-c < x < c$.

Exerc 1.5.3. *Mostre por indução matemática que* $5^{2n} - 1$ *é divisivel por* 8, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$.

Resolução.
Se $n = 1$, tem-se $5^2 - 1 = 24 = 8.3$ que é divisivel por 8.
Seja $n = m$. Mostre-se que se $5^{2m} - 1$ é divisivel por 8 (proposição designada por hipótese de indução) então $5^{2(m+1)} - 1$ é divisivel por 8 .

$$5^{2(m+1)} - 1 = 5^2.5^{2m} - 1 = (24 + 1).5^{2m} - 1 = 24.5^{2m} + 5^{2m} - 1$$

é divisivel por 8 uma vez que $24.5^{2m} = 8.3.5^{2m}$ é divisivel por 8. Ora da hipótese de indução $5^{2m} - 1$ é também divisivel por 8, sendo a soma de factores divisíveis por 8 divisivel por 8.
A proposição é assim verdadeira. ■

Exerc 1.5.4. *Mostre por indução matemática que* $\dfrac{n^3 - n + 3}{3} \in \mathbb{N}$, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$.

Resolução.
Seja $n = 1$, tem-se $\dfrac{1^3 - 1 + 3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$.
Seja $n = m$.
Mostre-se que se $\dfrac{m^3 - m + 3}{3} \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{(m+1)^3 - (m+1) + 3}{3} \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(m+1)^3 - (m+1) + 3}{3} = \frac{m^3 - m + 3}{3} + m^2 + m \in \mathbb{N}$$

uma vez que $\dfrac{m^3 - m + 3}{3} \in \mathbb{N}$, da hipótese de indução, e $m^2 + m \in \mathbb{N}$.
A proposição é assim verdadeira .
■

Exerc 1.5.5. *Mostre por indução matemática que para todo* $n \geq 4$ *se tem*

$$n^2 > 3(n + 1).$$

Resolução.
Para $n = 4$, $16 > 15$ é uma proposição verdadeira.
Seja $n = m$ e mostre-se que $P(m) \Rightarrow P(m + 1)$ ou seja

$$m^2 > 3(m + 1) \;\Rightarrow\; (m + 1)^2 > 3(m + 2).$$

Da hipotese de indução tem-se, $m^2 > 3(m + 1)$ vindo

$$m^2 > 3(m + 1) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 3(m + 1) + 2m + 1 \Leftrightarrow (m + 1)^2 > 5m + 4$$

Ora $5m+4>3m+6$ vindo

$$(m+1)^2>5m+4>3m+6 \Rightarrow (m+1)^2>3m+6=3(m+2)$$

A proposição é assim verdadeira.
■

Exerc 1.5.6. *Usando o princípio de indução matemática, mostre que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n\in\mathbb{N}.$$

Resolução.
Para $n=1$, $1^2=\dfrac{(1+1)(2+1)}{6}$ é uma proposição verdadeira.
Seja $n=m$ e mostre-se que $P(m)\Rightarrow P(m+1)$ ou seja

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Da hipotese de indução tem-se,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Some-se $(m+1)^2$ a ambos os membros da igualdade anterior

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \ + \ (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2$$

tem-se

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = (m+1)\,\frac{m(2m+1)+(m+1)}{6}$$

A proposição é assim verdadeira. ■

1.5.2 Enunciados de exercícios

Exerc 1.5.1. *Se $a,b\in\mathbb{R}$ mostre que*

i)$|a-b|\leq ||a|-|b||$

ii)$|a+b|\geq ||a|-|b||$

Exerc 1.5.2. *Considere o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-1| - x^2 + 2 < 1\}$. *Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto* A.

Exerc 1.5.3. *Considere o conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 1/2 - 1/n, \ n \in \mathbb{N}\}$. *Determine, caso existam, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto* A.

Exerc 1.5.4. *Mostre por indução matemática que* $n < 2^n$, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$.

Exerc 1.5.5. *Mostre por indução matemática que* $n! \geq 2^{n-1}$, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$.

Exerc 1.5.6. *Usando o princípio de indução matemática, prove que*

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Exerc 1.5.7. *Usando o princípio de indução matemática, prove que*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Exerc 1.5.8. *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *majorado, não vazio e* m *um majorante de* A. *Se* $m \neq \sup A$ *mostre que existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

Exerc 1.5.9. *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *majorado, não vazio e* $s = \sup A$. *Mostre que para qualquer* $\epsilon > 0$, *o conjunto* $V_\epsilon(s) \cap A$ *é não vazio.*

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.