Capítulo 2

Sucessões reais

Inicia-se o capítulo introduzindo os conceitos de sucessão limitada, sucessão monótona, sucessão convergente e relacionando estes conceitos entre si. A análise da convergência de sucessões, quer em $\mathbb{R}$ quer em $\overline{\mathbb{R}}$, bem como a determinação de limites de sucessões convergentes é um dos objectivos centrais no capítulo sendo neste contexto analisadas algumas propriedades algébricas e de ordem das sucessões. Introduz-se ainda o conceito de subsucessão e analisa-se as consequências do teorema de Bolzano-Weierstrass e da convergência de uma sucessão na existência de subsucessões convergentes. A finalizar o capítulo introduzem-se os conceitos de sucessão de Cauchy e de sucessão contractiva.

2.1 Sucessões. Convergência de sucessões

Definição 2.1.1. *Chama-se sucessão de termos em $A \neq \emptyset$ ou sucessão em A a qualquer aplicação u de $\mathbb{N}$ em A, $u : \mathbb{N} \to A$.*

Os elementos $u(1) = u_1$, $u(2) = u_2$, ..., $u(n) = u_n$, ..., dizem-se termos da sucessão. Definir uma sucessão consiste em indicar uma forma por meio da qual se pode obter para cada $n \in \mathbb{N}$ o correspondente termo de ordem n, u_n.

Exemplo 2.1.2.

i) Sucessões definidas por recorrência.

(a) $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_1 = a \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = u_n.r$ (progressão geométrica de primeiro termo a e razão r).

(b) $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
(sucessão dos números de Fibonacci).

ii) $v_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,, \quad n \in \mathbb{N}$

As sucessões que vamos analisar neste capítulo são sucessões reais: sucessões de termos em $\mathbb{R}$. As operações algébricas que se considera no conjunto $\mathbb{R}$ estendem-se assim naturalmente às sucessões reais.

Definição 2.1.3. *Sejam as sucessões* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *define-se*

sucessão adição	$u + v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u+v)_n = u_n + v_n$	
sucessão subtracção	$u - v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u-v)_n = u_n - v_n$	
sucessão multiplicação	$u.v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u.v)_n = u_n.v_n$	
sucessão divisão	$u/v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	$(u/v)_n = u_n/v_n$	$v_n \neq 0$

A relação de ordem considerada em $\mathbb{R}$ permite introduzir os conceitos de sucessão limitada e de sucessão monótona.

Definição 2.1.4. *A sucessão* u_n *é minorada (majorada) se e só se for minorado (majorado) como subconjunto de* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos seus termos.*

Definição 2.1.5. *A sucessão* u_n *é limitada se e só se o conjunto dos seus termos for minorado e majorado i.e.*

$$\underset{a,b\in\mathbb{R}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ a \leq u_n \leq b \Leftrightarrow \underset{c\in\mathbb{R}^+}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ |u_n| < c$$

Exemplo 2.1.6. *Tem-se para a sucessão* v_n, $n \in \mathbb{N}$ *do exemplo 2.1.2 ii)*

$$v_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1}$$

v_n *é assim limitada pois* $|v_n| < 1 \quad n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.7.

A adição, subtracção e multiplicação de duas sucessões limitadas é limitada;

Demonstração.
É imediado recorrendo às propriedades de números reais uma vez que

$$|u_n \pm v_n| \leq |u_n| + |v_n| \quad \text{e} \quad |u_n.v_n| \leq |u_n|.|v_n|.$$

■

Observação 2.1.8. *O quociente de duas sucessões limitadas, u_n/v_n pode não ser uma sucessão limitada (As sucessões limitadas $u_n = 1$ e $v_n = 1/n$ têm como quociente u_n/v_n uma sucessão não limitada). Uma condição suficiente para que $|u_n/v_n|$ seja limitada é $|u_n| \leq c$ e $|v_n| \geq d$, $c, d \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 2.1.9.

A sucessão u_n é uma sucessão crescente se e só se

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão u_n é uma sucessão decrescente se e só se

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão u_n é estritamente crescente (decrescente) se e só se qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ $(u_n > u_{n+1})$.

Definição 2.1.10. *Uma sucessão u_n diz-se uma sucessão monótona se for crescente ou decrescente e estritamente monótona se for estritamente crescente ou decrescente.*

Uma sucessão crescente (decrescente) é minorada (majorada), já que o primeiro termo da sucessão é um minorante (majorante) do conjunto dos seus termos.

Exemplo 2.1.11. *Seja a sucessão do exemplo 2.1.2 ii). Tem-se*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} > 0$$

Concluindo-se que v_n é crescente

A noção central desta secção é a noção de convergência e de limite de uma sucessão.

Definição 2.1.12. *Uma sucessão u_n converge ou tende para $a \in \mathbb{R}$ ($u_n \to a$) se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n > p \qquad u_n \in V_\epsilon(a)\,^1$$

Assim dizer que u_n converge para a equivale a afirmar que é finito o número de inteiros positivos que verificam a condição $u_n \notin V_\epsilon(a)$ i. e. $u_n \to a$ se e só se $u_n \in V_\epsilon(a)$ para todos os valores de n com excepção de um número finito.

Exemplo 2.1.13. *Considere-se a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$. Verifique-se que é uma sucessão convergente e que $a = 0$.*

Tem-se

$$u_n \in V_\epsilon(0) \Leftrightarrow |\frac{1}{n}| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon$$

Ora basta escolher $n > 1/\epsilon$ para que $\frac{1}{n} \in V_\epsilon(0)$ concluindo-se que u_n converge para 0. Em particular se $\epsilon = 0,01$ verifica-se que se $n > 100$, $u_n \in V_\epsilon(0)$.

As sucessões que não são convergentes dizem-se *divergentes*. Mostra-se, [1], que se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \to a$ então a é único. Assim sendo u_n uma sucessão convergente chama-se ao número real a, *limite* da sucessão e representa-se por

$$\lim u_n.$$

Se uma sucessão u_n não tiver limite diz-se uma sucessão divergente.

Relacione-se os conceitos de sucessão convergente e de sucessão limitada.

Teorema 2.1.14. *Qualquer sucessão convergente é limitada.*

Demonstração.
Se $u_n \to a$, fixado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existirá uma ordem p tal que para $n > p$, $u_n \in V_\epsilon(a)$.
O conjunto formado pelos termos u_n para $n > p$ é um conjunto limitado ($a + \epsilon$ é um majorante e $a - \epsilon$ é um minorante). Por outro lado o conjunto dos termos u_n para $n \leq p$ é também um conjunto limitado visto ser finito.
O conjunto de todos os termos da sucessão é a reunião de dois conjuntos limitados e qualquer reunião finita de conjuntos limitados é um conjunto limitado. ■

Há sucessões limitadas que não convergem, contudo tem-se:

[1] $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \epsilon\}$

Teorema 2.1.15. *As sucessões limitadas e monótonas são convergentes.*

Demonstração.
Seja u_n uma sucessão crescente e limitada e designe-se por U o conjunto dos seus termos.
$U \neq \emptyset$ é um conjunto limitado e consequentemente tem supremo. Designe-se esse supremo por s e mostre-se que

$$\lim u_n = s$$

Escolha-se $\epsilon > 0$. Por definição de supremo deve existir pelo menos $u_p \in U$ tal que

$$u_p > s - \epsilon.$$

Como a sucessão é crescente para $n > p$

$$u_n \geq u_p > s - \epsilon.$$

Por outro lado sendo $s = \sup U$

$$u_n \leq s.$$

Assim a partir da ordem p todos os termos $u_n \in V_\epsilon(s)$ e consequentemente $u_n \to s$.
Analogamente se demonstra a convergência quando a sucessão é decrescente tendo-se $\lim u_n = \inf U$. ■

Observação 2.1.16.

- *Uma sucessão pode ser convergente sem ser monótona. (Ex.: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$). Apesar da sua importância as sucessões monótonas e limitadas constituem uma classe pequena de sucessões convergentes.*
- *É fundamental o axioma do supremo na demonstração do teorema 2.1.15.*

Exemplo 2.1.17. *Considere-se a sucessão limitada definida por recorrência*

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n^2, \qquad n \geq 1.$$

Mostre-se que x_n é convergente.

Uma vez que nem todas as sucessões limitadas são convergentes, vai-se mostrar, por indução, que a sucessão é monótona. Tem-se

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{4}$$

e conjectura-se que x_n é uma sucessão decrescente. Prove-se por indução que

$$x_{n+1} - x_n \leq 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i)

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leq 0$$

ii)

$$x_{m+1} - x_m \leq 0 \quad \underset{?}{\Rightarrow} \quad x_{m+2} - x_{m+1} \leq 0$$

$$x_{m+2} - x_{m+1} = x_{m+1}^2 - x_m^2 = (x_{m+1} + x_m).(x_{m+1} - x_m) \leq 0$$

já que sendo $x_m \geq 0$ se tem $x_{m+1} + x_m \geq 0$.

Conclui-se que x_n é uma sucessão decrescente e como é limitada então x_n é uma sucessão convergente.

2.2 Propriedades algébricas de sucessões. Sucessões enquadradas

A análise da convergência de sucessões mais gerais que as sucessões monótonas e limitadas pode ser feita usando alguns resultados que se vão indicar e que se podem demonstrar usando directamente a definição de limite.

Teorema 2.2.18. *Se x_n e y_n, $n \in \mathbb{N}$ são sucessões convergentes respectivamente para a e b então*

i) $x_n \pm y_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$

ii) $x_n.y_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim(x_n.y_n) = \lim x_n. \lim y_n$

iii) Se $y_n \to b \neq 0$, $y_n \neq 0$ *tem-se* $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b}$

Demonstração. *

i) Tem-se

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Sendo $\epsilon > 0$ existe p_1 tal que se $n > p_1$ então $|x_n - a| \leq \epsilon/2$ e existe p_2 tal que se $n > p_2$ então $|y_n - b| \leq \epsilon/2$. Assim se $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $n > p$ tem-se como se pretendia mostrar

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

ii) Tem-se

$$|x_n.y_n - a.b| = |(x_n.y_n - x_n.b) + (x_n.b - a.b)| \leq |x_n|.|y_n - b| + |x_n - a|.|b|$$

Ora sendo $|x_n| \leq M_1$, $n \in \mathbb{N}$ e $M = \sup\{M_1, |y|\}$ tem-se

$$|x_n.y_n - a.b| \leq M|y_n - b| + M|x_n - a|$$

o que analogamente a (i) permite estabelecer a conclusão.

iii) É analogo a (ii).

■

Observação 2.2.19. *Sejam x_n e y_n sucessões reais*

i) Se x_n e y_n são sucessões divergentes, $x_n + y_n$ pode ser convergente ou divergente.

ii) Se uma sucessão x_n é convergente e y_n é uma sucessão divergente, $x_n + y_n$ é sempre uma sucessão divergente.

Exemplo 2.2.20. *Determine-se se existir o limite da sucessão*

$$v_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1}$$

Por definição $\sqrt{\frac{1}{n} + 1} \to 1$. Ora $y_n = \sqrt{\frac{1}{n} + 1} + 1$ é a adição de sucessões convergentes e sendo $y_n \neq 0$ a sucessão v_n é convergente tendo-se

$$\lim v_n = \frac{1}{2}$$

Teorema 2.2.21 (Sucessões enquadradas)**.** *Sejam x_n, y_n, z_n sucessões reais e suponha-se que existe uma ordem p tal que para $n > p$*

$$x_n \leq z_n \leq y_n.$$

Supondo que x_n, y_n convergem para $a \in \mathbb{R}$ então z_n é convergente e

$$\lim z_n = a.$$

Demonstração.
Fixado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existem p_1, p_2 tais que se $n > p_1$ então $x_n \in V_\epsilon(a)$ e se $n > p_2$ então $y_n \in V_\epsilon(a)$. Sendo $\tilde{p} = \max\{p_1, p_2, p\}$ tem-se então que se $n > \tilde{p}$

$$a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon$$

e portanto $z_n \in V_\epsilon(a)$. ■

Observação 2.2.22. *Se x_n e y_n não são sucessões convergentes para o mesmo limite não se pode afirmar que z_n é uma sucessão convergente. (Ex.:$-3 < (-1)^n < 7$).*

Exemplo 2.2.23. *Determine-se o limite da sucessão $z_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n}$.*

Tem-se

$$-\frac{1}{n} < \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \pm\frac{1}{n} \to 0$$

Assim

$$\lim z_n = 0$$

Proposição 2.2.24. *Se a sucessão x_n é convergente e $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$.*

Demonstração.
Consequência imediata de $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ ■

Exemplo 2.2.25.

i) Mostre-se, recorrendo à desigualdade de Bernoulli, que se $0 < c < 1$, a sucessão $z_n = c^n$ é convergente para zero.

$(1+x)^n \geq 1+nx\,, \qquad x > -1, n \in \mathbb{N}$ *(desigualdade de Bernoulli)*

.

ii) Sendo $a \in \mathbb{R}$, determinem-se os limites das sucessões

$$u_n = \left(\frac{a}{1+|a|}\right)^n \qquad e \qquad v_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}.$$

i) Sendo $0 < c < 1$, tem-se

$$c = \frac{1}{1+a}$$

em que $a > 0$. Assim

$$x_n = 0 < c^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = y_n \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{an} \to 0$$

Do teorema das sucessões enquadradas conclui-se que $\lim z_n = 0$.

ii) Tendo presente i), tem-se

$$|c| = \left|\frac{a}{1+|a|}\right| < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{a}{1+|a|}\right)^n = 0.$$

Quanto à sucessão v_n, tem-se

$$v_n = \frac{1}{2}\frac{a^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^n.$$

Se $\left|\frac{a}{4}\right| < 1$, $v_n \to 0$. Se $\left|\frac{a}{4}\right| > 1$, v_n é uma sucessão não limitada e consequentemente divergente. Se $\left|\frac{a}{4}\right| = 1$, sendo $a = 4$, tem-se $v_n \to 1/2$, sendo $a = -4$, tem-se v_n divergente, mas uma sucessão limitada.

2.3 Convergência de sucessões em $\overline{\mathbb{R}}$. Cálculo de limites

Ao conjunto dos números reais pode juntar-se os elementos $+\infty$ e $-\infty$ (designados por pontos do infinito) e formar um novo conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ designado por recta acabada i.e.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

É natural neste conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ introduzir uma relação de ordem que restrita a $\mathbb{R}$ é a relação de ordem em $\mathbb{R}$ e entre qualquer número real x e $\pm\infty$ se tenha

$$-\infty < x < +\infty$$

Tal como no conjunto $\mathbb{R}$, introduzem-se em $\overline{\mathbb{R}}$ as operações binárias de adição e multiplicação. Em particular se $a \in \mathbb{R}$ tem-se para a operação de adição

$$a + (+\infty) = +\infty \qquad a + (-\infty) = -\infty$$

$+\infty + (-\infty)$ é uma forma indeterminada;

e para a operação de multiplicação:
Se $a > 0$

$$a.(+\infty) = +\infty \qquad a.(-\infty) = -\infty$$

Se $a < 0$

$$a.(+\infty) = -\infty \qquad a.(-\infty) = +\infty$$

$0.(\pm\infty)$ é uma forma indeterminada

Observação 2.3.26.

- *Em $\overline{\mathbb{R}}$, generalizam-se naturalmente as noções de máximo e mínimo de um conjunto, de conjunto majorado, de conjunto limitado ($\overline{\mathbb{R}}$ tem máximo $+\infty$ e mínimo $-\infty$).*
- *Em $\overline{\mathbb{R}}$, qualquer subconjunto é limitado e tem-se*

  i) Se $X \neq \emptyset$ é majorado em $\mathbb{R}$ então $\sup_{\mathbb{R}} X = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} X$

  ii) Se $X \neq \emptyset$ é não majorado em $\mathbb{R}$ então $\sup X = +\infty$

  iii) Se $X = \emptyset$ então $\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty$.

Um dos objectivos centrais desta secção é definir a noção de sucessão real convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Antes de apresentar essa definição, defina-se vizinhança de $-\infty$ e de $+\infty$

$$V_\epsilon(-\infty) = [-\infty, -1/\epsilon[\qquad V_\epsilon(+\infty) =]1/\epsilon + \infty]$$

Definição 2.3.27. *A sucessão u_n converge para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se e só se qualquer que seja $\epsilon > 0$ é finito o conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : \ u_n \notin V_\epsilon(a)\}$$

Assim

- Se $a \in \mathbb{R}$ existe equivalência entre a noção de convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ e em $\mathbb{R}$.

- Se $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ tem-se

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} n > p \ : \ u_n > 1/\epsilon.$$
$$u_n \to -\infty \Leftrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} n > p \ : \ u_n < -1/\epsilon.$$

Em $\overline{\mathbb{R}}$, de imediato se conclui:

Teorema 2.3.28. *Qualquer sucessão monótona é convergente em* $\overline{\mathbb{R}}$.

Vai-se em seguida estabelecer alguns resultados que permitem determinar, em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de sucessões reais convergentes.

Proposição 2.3.29. *Seja* u_n *uma sucessão de termos positivos, tal que*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a\,.$$

Se $a < 1$ *então* u_n *converge e* $\lim u_n = 0$

Demonstração.
Sendo $u_n > 0$, tem-se $a \geq 0$.
Seja r tal que $a < r < 1$ e defina-se $\epsilon = r - a > 0$. Existe $p \in \mathbb{N}$, tal que se $n > p$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - a\right| < \epsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \epsilon = a + (r - a) = r$$

Assim se $n > p$

$$0 < u_{n+1} < u_n r < u_{n-1} r^2 < \ldots < u_p r^{n+1-p}$$

Definindo $C = \dfrac{u_p}{r^p}$ tem-se para $n > p$

$$0 < u_{n+1} < C r^{n+1}$$

Ora uma vez que $0 < r < 1$ tem-se $\lim r^n = 0$ e pelo teorema das sucessões enquadradas $\lim u_n = 0$. ■

Analogamente se demonstra a proposição seguinte:

Proposição 2.3.30. *Seja* u_n *uma sucessão de termos positivos, tal que*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a\,.$$

Se $1 < a \leq +\infty$ *então* u_n *converge para* $+\infty$.

Exemplo 2.3.31. *Determine-se o limite da sucessão* $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n} = \lim 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim \frac{1}{(1+1/n)^2} = 3 > 1$$

Conclui-se que u_n é convergente para $+\infty$.

Exemplo 2.3.32. *Determinem-se, se existirem, os limites das sucessões*

$$i)\ \frac{n!}{n^n}, \qquad ii)\ \frac{c^n}{n!} \qquad iii)\ \frac{n^b}{c^n}$$

em que $b > 0$ *e* $c > 1$.

$$\text{i)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \to 1/e < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{n!}{n^n}$ é convergente para 0.

$$\text{ii)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{c^n} = \frac{c}{(n+1)} \to 0 < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{c^n}{n!}$ é convergente para 0.

$$\text{iii)}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^b}{c^{n+1}}\frac{c^n}{n^b} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b\frac{1}{c} \to \frac{1}{c} < 1$$

Conclui-se que $\dfrac{n^b}{c^n}$ é convergente para 0.

Pode assim estabelecer-se uma escala de sucessões

$$n^b << c^n << n! << n^n, \qquad b > 0, c > 1$$

em que $u_n << v_n$ significa que u_n é desprezável em relação a v_n, isto é que $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Proposição 2.3.33. *Seja* u_n *um sucessão de termos positivos. Então se* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *converge em* $\overline{\mathbb{R}}$, $\sqrt[n]{u_n}$ *também converge e para o mesmo limite.*

Demonstração. *
Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Tem-se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \ n > p \ \ l - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon$$

Tem-se:

$$(l-\epsilon)u_{p+1} < u_{p+2} < (l+\epsilon)u_{p+1}$$
$$(l-\epsilon)^2 u_{p+1} < u_{p+3} < (l+\epsilon)^2 u_{p+1}$$

e em geral para $n > p+1$

$$(l-\epsilon)^{n-p-1}u_{p+1} < u_n < (l+\epsilon)^{n-p-1}u_{p+1}$$

vindo

$$(l-\epsilon)(l-\epsilon)^{\frac{-(p+1)}{n}} u_{p+1}^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{u_n} < (l+\epsilon)(l+\epsilon)^{\frac{-(p+1)}{n}} u_{p+1}^{\frac{1}{n}}$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas, qualquer sublimite de $\sqrt[n]{u_n}$ pertence a $[l-\epsilon,\, l+\epsilon]$ uma vez que u_{p+1} é um número real fixo. Como ϵ é qualquer, o conjunto dos sublimites é singular e $\sqrt[n]{u_n}$ converge para l. ■

Exemplo 2.3.34. *Determinem-se os seguintes limites*
i) $\sqrt[n]{n}$.
ii) $\sqrt[n]{(n+1)! - n!}$

Da proposição 2.3.33 fácilmente se conclui que o limite é 1 em i), quanto a ii), seja $u_n = (n+1)! - n!$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!} = \lim \frac{(n+1)!(n+2-1)}{n!(n+1-1)} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)(n+1) = +\infty$$

Concluindo-se que $\sqrt[n]{u_n}$ é convergente para $+\infty$.

2.4 Subsucessões

Nesta secção vai-se definir o conceito de subsucessão começando por definir a sucessão composta de sucessões.

Definição 2.4.35. *Chama-se composta de sucessões u_n e v_n, em que $v_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, à sucessão $(u \circ v)_n$, tal que*

$$(u \circ v)_n = u_{v_n}$$

i.e. que tem por termo de ordem n, o termo de ordem v_n da sucessão u_n.

Definição 2.4.36. *w_n é subsucessão da sucessão de termos reais u_n, se e só se existir uma sucessão v_n, tal que w_n é composta de u_n com v_n e v_n é estritamente crescente*

Observação 2.4.37.

- *Qualquer subsucessão de uma sucessão limitada é limitada. Qualquer subsucessão de uma sucessão monótona é monótona.*
- *Uma sucessão não limitada pode ter subsucessões limitadas e uma sucessão não monótona tem subsucessões monótonas.*

Exemplo 2.4.38. *Definam-se subsucessões de*

$$u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

por composição com as sucessões

i) $v_k = k + 2$

ii) $\widetilde{v}_k = 2k$

iii) $\widetilde{\widetilde{v}}_k = 2k + 1$

Têm-se as subsucessões

$$w_k = (-1)^k \frac{k+2}{k+3} \qquad \widetilde{w}_k = \frac{2k}{2k+1} \qquad \widetilde{\widetilde{w}}_k = -\frac{2k+1}{2k+2}$$

Teorema 2.4.39. *Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente para o mesmo limite*

Demonstração.
Seja $u_n \to a$ e $w_n = u_{v_n}$ uma subsucessão de u_n.
Sendo u_n convergente para a dado arbitrariamente $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$ se tem $u_n \in V_\epsilon(a)$. Ora sendo v_n uma sucessão estritamente crescente de inteiros positivos, por indução matemática, pode mostrar-se que:

$$v_n \geq n\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$(\; v_1 \geq 1\,; \quad v_n \geq n \Rightarrow v_{n+1} \geq n+1 \quad \text{pois} \quad v_{n+1} > v_n \;)$

Conclui-se assim que se $n > p$ se tem $v_n > p$ e consequentemente

$$w_n = u_{v_n} \in V_\epsilon(a) \qquad \text{i.e.} \quad \lim w_n = a\,.$$

■

Este teorema é usado para fácilmente justificar a divergência de algumas sucessões. Em particular, se u_n admitir duas subsucessões que tenham limites diferentes, u_n é divergente.

Exemplo 2.4.40. *Analise-se a convergência da sucessão u_n do exemplo anterior*

A sucessão u_n não é convergente pois

$$w_k = (-1)^k \frac{k+2}{k+3}$$

não é convergente. Contudo são convergentes as subsucessões $\widetilde{w}_k$ e $\widetilde{\widetilde{w}}_k$ respectivamente para 1 e -1.

Exemplo 2.4.41. *Determine-se o limite da sucessão convergente*

$$x_1 = 1/2 \qquad x_{n+1} = x_n^2 \qquad n \geq 1$$

Tem-se uma vez que a sucessão x_n é convergente

$$\lim x_{n+1} = \lim x_n = l$$

vindo, tendo presente o teorema 2.4.39,

$$l = l^2 \Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \vee l = 1$$

Ora como $x_n \leq 1/2$ tem-se $\lim x_n \leq 1/2$ concluindo-se que

$$l = \lim x_n = 0$$

Teorema 2.4.42 (Bolzano - Weiestrass)**.** *Toda a sucessão real limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente.*

Demonstração. *
Na demonstração deste teorema usa-se uma das importantes consequências do axioma do supremo o princípio dos intervalos encaixados[2]
A ideia central da demonstração quando o conjunto dos termos da sucessão é um conjunto infinito, consiste em partir de um intervalo que contém os termos da sucessão e, dividindo ao meio sucessivamente, obter uma sucessão de intervalos cada um dos quais tem um termo da sucessão.
Seja $X = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos termos da sucessão x_n.

[2]Seja $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de intervalos limitados e fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ então (i) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$, (ii) Se $\inf\{b_n - a_n\} = 0$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}, \quad c \in \mathbb{R}$

- Seja X um conjunto finito.
  Há pelo menos um valor de x_n que se repete infinitas vezes. Designando esse valor por a podemos formar uma subsucessão $x_{n_k} = a$ obviamente convergente.

- Seja X um conjunto infinito.
  Sendo x_n limitada, X é limitado e consequentemente

  $$X \subset [a, b] = I_1$$

  Construa-se neste caso uma subsucessão convergente, x_{n_k}.
  Seja $x_{n_1} = x_1$. Divida-se $I = I_1$ ao meio obtendo-se dois subintervalos I_1', I_1''. Dado que X é um conjunto infinito pelo menos um dos conjuntos

  $$X_1' = \{x_n : \quad x_n \in I_1' \wedge n > n_1\}, \qquad X_1'' = \{x_n : \quad x_n \in I_1'' \wedge n > n_1\}$$

  é um conjunto infinito. Se X_1' for um conjunto infinito x_{n_2} será o primeiro elemento de X_1' senão faz-se uma escolha semelhante com X_1''.
  Seja I_2 o subintervalo associado a X_1' ou X_1''.
  Repete-se o processo dividindo I_2 ao meio e escolhe-se x_{n_3}. Obtém-se assim uma sucessão de intervalos encaixados

  $$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

  cujo comprimento tende para zero $((b-a)2^{-(k-1)})$ e tal que $x_{n_k} \in I_k$.
  Pelo princípio dos intervalos encaixados

  $$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

  Ora atendendo a que

  $$|x_{n_k} - c| \leq (b-a)2^{-(k-1)}$$

  conclui-se que a subsucessão construida é convergente e que $x_{n_k} \to c$.

■

Definição 2.4.43. *Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é sublimite da sucessão u_n se existir uma subsucessão de u_n que convirga para a.*

Exemplo 2.4.44. *Indique-se o conjunto dos sublimites da sucessão*

$$v_n = (-1)^n\,.$$

Sendo S o conjunto dos sublimites tem-se $S = \{-1, 1\}$.

Teorema 2.4.45. *O número real a é sublimite da sucessão u_n se e só se qualquer que seja $\epsilon > 0$ é infinito o conjunto dos inteiros positivos n que verificam a condição $u_n \in V_\epsilon(a)$.*

Demonstração. *

• Seja $w_n = (u \circ v)_n$ uma subsucessão de u_n convergente para a i.e.

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad n > p \qquad w_n = u_{v_n} \in V_\epsilon(a).$$

Obviamente é um conjunto infinito o conjunto formado pelos inteiros positivos v_n tais que $n > p$.

• Reciprocamente suponha-se que qualquer que seja $\epsilon > 0$ é um conjunto infinito o conjunto dos inteiros positivos n tais que $u_n \in V_\epsilon(a)$.

Sendo $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$ pode escolher-se $v_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{v_1} \in V_{\frac{1}{2}}(a)$, $v_2 > v_1$ tal que $u_{v_2} \in V_{\frac{1}{2}}(a)$. Em geral, escolhidos $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ generalizando o processo anterior, é sempre possível escolher $v_n > v_{n-1}$ de modo que

$$u_{v_n} \in V_{\frac{1}{n}}(a)$$

Nestas condições $w_n = u_{v_n}$ será uma subsucessão de u_n convergente para a já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$a - \frac{1}{n} < w_n < a + \frac{1}{n}$$

■

Observação 2.4.46. *O número real a é sublimite de u_n se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \ : \ n > p \ \ u_n \in V_\epsilon(a)$$

O número real a é limite de u_n se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ : \ n > p \ \ u_n \in V_\epsilon(a)$$

Exemplo 2.4.47. *Usando a noção de sublimite mostre-se que para $a > 0$*

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

• Considere-se $a > 1$

Seja a sucessão $z_n = a^{\frac{1}{n}}$. Tem-se de imediato que

$$z_n > 1 \quad \text{e} \quad z_{n+1} < z_n\,.$$

A sucessão z_n é pois uma sucessão limitada e decrescente logo é convergente existindo $z = \lim z_n$.
Qualquer subsucessão tem pelo teorema 2.4.39 o mesmo limite de z_n e

$$z_{2n} = a^{\frac{1}{2n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = z_n^{\frac{1}{2}}.$$

$$\lim z_{2n} = \lim z_n^{\frac{1}{2}}$$

Assim

$$z = z^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z^2 - z = 0 \Rightarrow z = 0 \vee z = 1$$

Como $z_n > 1$, tem-se $z = 1$.

- Considere-se $0 < a < 1$

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim 1/(1/a)^{\frac{1}{n}} \to 1/1 = 1.$$

2.5 Sucessão de Cauchy. Sucessão contractiva

Um critério de convergência importante é a noção de sucessão de Cauchy ou sucessão fundamental.

Definição 2.5.48. *A sucessão u_n é uma sucessão de Cauchy se e só se*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{r,s\in\mathbb{N}}{\forall} \ r, s > p \ \ |u_r - u_s| < \epsilon.$$

Exemplo 2.5.49. *Seja $u_n = 1 + 1/n$, tem-se $|u_r - u_s| = |1/r - 1/s| \leq 1/r + 1/s$, o que permite concluir que u_n é uma sucessão de Cauchy*

Proposição 2.5.50. *Qualquer sucessão de Cauchy é uma sucessão limitada*

Demonstração.
Seja u_n uma sucessão de Cauchy. Fixado $\epsilon > 0$ existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer números inteiros $r, s > p$

$$|u_r - u_s| < \epsilon$$

Em particular escolhendo para s o valor fixo $p + 1$, tem-se para $r > p$

$$|u_r - u_{p+1}| < \epsilon$$

Assim para $r > p$ o conjunto dos termos u_r é limitado ($u_{p+1} - \epsilon$ é um minorante e $u_{p+1} + \epsilon$ é um majorante).
Como o conjunto dos termos u_r com $r \leq p$ é finito e portanto limitado pode concluir-se que o conjunto dos termos da sucessão, união de dois conjuntos limitados, é limitado. ■

Teorema 2.5.51. *Uma sucessão real é convergente se e só se é sucessão de Cauchy*

Demonstração. *
• Mostre-se que sendo u_n uma sucessão convergente então é uma sucessão de Cauchy.
Sendo $a = \lim u_n$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ : \ n > p \ \ |u_n - a| < \epsilon/2$$

Ora para $n, s > p$

$$|u_n - u_s| = |u_n - a + a - u_s| \leq |u_n - a| + |a - u_s| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Concluindo-se que a sucessão é de Cauchy.
• Mostre-se que sendo u_n uma sucessão de Cauchy é uma sucessão convergente.
Seja η sublimite de u_n que existe pois u_n é uma sucessão limitada visto ser uma sucessão de Cauchy. Mostre-se que $\lim u_n = \eta$.
Fixe-se $\epsilon > 0$. Sendo u_n uma sucessão de Cauchy pode determinar-se $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > p \quad |u_n - u_m| < \epsilon/2$$

e consequentemente

$$v_m, n > p \quad |u_n - u_{v_m}| < \epsilon/2$$

Por outro lado sendo η sublimite de u_n pode escolher-se $v_m \geq m > p$ tal que

$$|u_{v_m} - \eta| < \epsilon/2$$

Conclui-se assim que sendo $v_m \geq m > p$

$$|u_n - \eta| = |u_n - u_{v_m} + u_{v_m} - \eta| \leq |u_n - u_{v_m}| + |u_{v_m} - \eta| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

i.e. $\lim u_n = \eta$. ■

A definição de sucessão de Cauchy é muito útil para provar a convergência de sucessões para as quais não se tem candidato a limite

Exemplo 2.5.52. *Verifique-se que é divergente a sucessão*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Para $m > n$, tem-se

$$x_m - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m}$$

cujo o 2º termo tem $m - n$ parcelas. Então

$$x_m - x_n \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m}$$

Em particular para $m = 2n$ tem-se

$$x_m - x_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Conclui-se assim que a sucessão x_n não é sucessão de Cauchy.

A finalizar esta secção introduza-se a noção de sucessão contractiva.

Definição 2.5.53. *A sucessão x_n diz-se uma sucessão contractiva se existe $0 < c < 1$ tal que*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|, \quad n > 1.$$

Proposição 2.5.54. *Se x_n é uma sucessão contractiva então é uma sucessão convergente.*

Demonstração. * Sendo x_n uma sucessão contractiva tem-se

$$|x_3 - x_2| \leq c|x_2 - x_1|$$

$$|x_4 - x_3| \leq c|x_3 - x_2| \leq c^2|x_2 - x_1|$$

Mostrando-se por indução matemática que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c^{n-1}|x_2 - x_1|, \quad n > 1.$$

Tem-se então

$$|x_m - x_n| \leq |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leq$$

$$\leq (c^{m-2} + \ldots + c^{n-1})|x_2 - x_1| \leq c^{n-1}\frac{1 - c^{m-n}}{1 - c}|x_2 - x_1|$$

i.e.

$$|x_m - x_n| \leq c^{n-1}\frac{|x_2 - x_1|}{1 - c} \leq \epsilon$$

Assim a sucessão x_n é uma sucessão de Cauchy e consequentemente uma sucessão convergente. ■

Exemplo 2.5.55. *Considere-se a sucessão* u_n

$$u_1 = 1 - \frac{a}{2}\,, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1 - a}{2} \qquad 0 < a < 1,\ n > 1$$

Analise-se se a sucessão é contractiva. Se u_n *for uma sucessão convergente determine-se o seu limite.*

Tem-se

$$|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{2}|u_n^2 + 1 - a - u_{n-1}^2 - 1 + a| = \frac{1}{2}|u_n^2 - u_{n-1}^2| =$$

$$= \frac{1}{2}|u_n + u_{n-1}||u_n - u_{n-1}|$$

Analise-se $|u_n + u_{n-1}|$.
Tem-se $u_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$ já que
• $u_1 < 1$
• $u_m < 1 \Rightarrow u_{m+1} < 1$
De facto

$$u_m < 1 \ \Rightarrow\ u_m^2 < 1 \Rightarrow\ 1 + u_m^2 - a < 2 - a \Rightarrow u_{m+1} < 1 - \frac{a}{2} < 1$$

Assim

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)|u_n - u_{n-1}|$$

A sucessão u_n é contractiva ($c = 1 - \frac{a}{2}$).
Sendo a sucessão contractiva é uma sucessão convergente. Determine-se $l = \lim u_n = \lim u_{n+1}$

$$l = \frac{1}{2}\left(l^2 + 1 - a\right) \Rightarrow l^2 - 2l + 1 - a = 0$$

$$l = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-a)}}{2a} = 1 \pm \sqrt{a}$$

Ora como $u_n \leq 1$, conclui-se que $l = 1 - \sqrt{a}$

2.6 Exercícios

2.6.1 Exercícios resolvidos

Exerc 2.6.1. *Considere a sucessão $w_n = u_n + v_n$, $n \in \mathbb{N}$, em que*

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{3^n(2n)!}} \qquad e \qquad v_1 = 1, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{v_n^{-1} + 2}$$

i) Determine o limite da sucessão u_n. A sucessão u_n é limitada? Justifique.

ii) Mostre que a sucessão v_n é decrescente.

iii) A sucessão v_n é uma sucessão de Cauchy? Justifique.

iv) A sucessão w_n é uma sucessão convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o limite.

Resolução.

i)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(2(n+1))!}}{\frac{n!}{3^n(2n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6(2n+1)} = 0$$

A sucessão u_n é limitada uma vez que é uma sucessão convergente.

ii) Mostre-se que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio de indução matemática.

Se $n = 1$, $v_2 - v_1 \leq 0$ é uma proposição verdadeira.

Mostre-se que para $m \in \mathbb{N}$ $v_{m+1} - v_m \leq 0 \Rightarrow v_{m+2} - v_{m+1} \leq 0$.

Tem-se

$$v_{m+2} - v_{m+1} = \frac{1}{v_{m+1}^{-1} + 2} - \frac{1}{v_m^{-1} + 2} = \frac{v_{m+1} - v_m}{(1 + 2v_m)(1 + 2v_{m+1})}$$

Ora da hipótese de indução e uma vez que $v_m > 0$ para $m \in \mathbb{N}$ tem-se $v_{m+2} - v_{m+1} \leq 0$. Assim $v_{n+1} - v_n \leq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, i.e. a sucessão v_n é decrescente.

iii) Uma vez que a sucessão v_n é decrescente e limitada ($0 < v_n \leq v_1$), v_n é uma sucessão convergente. Ora toda a sucessão real convergente é uma sucessão de Cauchy.

iv) A sucessão w_n é convergente, pois resulta da adição de duas sucessões convergentes e

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Seja $v = \lim v_n$. Determine-se o valor de v. Sendo v_n convergente, v_{n+1} é igualmente convergente, uma vez que é uma sua subsucessão, tendo-se $v = \dfrac{v}{1+v}$. Assim $v = 0$ concluindo-se de (i) que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

■

Exerc 2.6.2. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é crescente.

ii) A sucessão x_n é limitada superiormente. A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Resolução.

i) Para $n = 1$, $x_2 - x_1 = \sqrt{3} - 1 \geq 0$
Para $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $x_{m+1} - x_m \geq 0$ então $x_{m+2} - x_{m+1} \geq 0$.
Da definição da sucessão, tem-se

$$x_{m+2} - x_{m+1} = \sqrt{2 + x_{m+1}} - \sqrt{2 + x_m} = \frac{\overbrace{x_{m+1} - x_m}^{\text{(da hipótese de indução) } \geq 0}}{\underbrace{\sqrt{2 + x_{m+1}} + \sqrt{2 + x_m}}_{>0}} \geq 0$$

Pelo princípio de indução matemática $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão x_n é crescente.

ii) Da alínea anterior, como x_n é crescente é limitada inferiormente, sendo o seu primeiro termo um dos minorantes do conjunto dos seus termos. Assim x_n é uma sucessão limitada. A sucessão x_n é assim convergente pois é uma sucessão monótona e limitada.

■

Exerc 2.6.3. *Indique, se existirem, os limites das sucessões de termos gerais:*

$$u_n = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^2 + 1} \qquad v_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{3^n (2n)!}}$$

Justifique abreviadamente as respostas.

Resolução.

$$u_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

Quando, $n \to +\infty$, $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$ e $1+\frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$. Das regras operatórias com limites de sucessões, tem-se de imediato $u_n \longrightarrow 0$

$$v_n = \sqrt[n]{y_n}$$

Tem-se

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{3^{n+1}(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{3^n(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\,\frac{3^n(2n)!}{3^{n+1}(2(n+1))!} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right)^2 \frac{3^n(2n)!}{3\,3^n(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{3(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{2n(1+\frac{1}{n})2n(1+\frac{1}{2n})} = \frac{1}{12}\,\frac{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})}$$

concluindo-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{12}.$$

■

Exerc 2.6.4. *Considere as sucessões de termos reais*

$$a_n = \frac{2^n}{1+2^n} \qquad b_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + ... + \frac{2^n}{1+2^n}$$

i) Determine o limite da sucessão a_n. A sucessão a_n é limitada? Justifique.

ii) A sucessão b_n é convergente? Justifique.

Resolução.

i)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} = 1$$

A sucessão a_n é uma sucessão limitada, pois toda a sucessão convergente é limitada.

ii) A sucessão $b_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + ... + \frac{2^n}{1+2^n}$ é uma sucessão de termos positivos, estritamente crescente.
Tem-se

$$b_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + ... + \frac{2^n}{1+2^n} \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + ... + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n$$

Uma vez que a sucessão $\frac{2}{3}n$ não é majorada b_n também é uma sucessão não majorada.
Assim não sendo a sucessão b_n limitada é uma sucessão divergente.

■

Exerc 2.6.5. *Considere a sucessão a_n, definida por*

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é crescente.

ii) Mostre que a sucessão a_n é contractiva.

iii) A sucessão x_n é convergente? Justifique. Determine o limite de a_n

Resolução.

i) Mostra-se que $a_{n+1} \geq a_n \qquad n \in \mathbb{N}$.

- Tem-se $a_2 = \frac{3}{2} > a_1 = 1$.
- Mostre-se que $a_{m+1} \geq a_m \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
  Tem-se

  $$a_{m+2} \geq a_{m+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{a_{m+1}} \geq \frac{1}{2} + \sqrt{a_m} \Leftrightarrow \sqrt{a_{m+1}} \geq \sqrt{a_m} \Leftrightarrow a_{m+1} \geq a_m.$$

  Como por hipótese de indução se assume que $a_{m+1} \geq a_m$, tem-se também que $a_{m+2} \geq a_{m+1}$.

ii) a_n é uma sucessão contractiva se existe $C \in]0,1[$ tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < C|a_{n+1} - a_n|, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}.$$

Tem-se

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}| = \frac{|a_{n+1} - a_n|}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} < \frac{|a_{n+1} - a_n|}{2},$$

já que a_n é crescente e $a_1 = 1$, tendo-se $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > 2$, $n \in \mathbb{N}$.
Conclui-se que a sucessão a_n é contractiva com $C = \frac{1}{2}$.

iii) a_n é uma sucessão convergente, já que é contractiva. Como a_{n+1} é uma subsucessão de a_n, a_{n+1} também é convergente e $\lim a_{n+1} = \lim a_n$.
Se $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$:

$$\lim a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\lim a_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \sqrt{a}$$

$$a - \frac{1}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = a \Leftrightarrow a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0$$

vindo

$$a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \vee a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a_n é uma sucessão crescente e $a_1 = 1$, tem-se $a > 1$, concluindo-se que $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

■

Exerc 2.6.6. *Determine se existirem os limites das seguintes sucessões em* $\overline{\mathbb{R}}$.

$$i)\quad u_n = \frac{n^p}{n!} \qquad ii)\quad v_n = \frac{(1/2)^n}{n^3} \qquad iii)\quad w_n = \frac{3^n}{n^2}$$

Resolução.

i)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}\frac{n!}{n^p} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \to 0 < 1 \Rightarrow u_n = \frac{n^p}{n!} \to 0$$

ii)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)^3}\frac{n^3}{(1/2)^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \to 1/2 < 1 \Rightarrow v_n = \frac{(1/2)^n}{n^3} \to 0$$

iii)

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n} = 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} \to 3 > 1 \Rightarrow w_n = \frac{3^n}{n^2} \to +\infty$$

■

Exerc 2.6.7. *Determine se existirem os limites das seguintes sucessões*

i) $u_n = \dfrac{n^{80}+n!}{n^n+50n!}$ *ii)* $v_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} + \dfrac{\cos(n!\pi)}{n^2+1}$ *iii)* $w_n = \dfrac{n^n}{3^n+n!}$

Resolução.

i)

$$\frac{n^{80}+n!}{n^n+50n!} = \frac{n!}{n^n}.\frac{\dfrac{n^{80}}{n!}+1}{1+\dfrac{50n!}{n^n}} \to 0$$

já que

$$\lim \frac{n^{80}}{n!} = 0\,, \qquad \lim \frac{50n!}{n^n} = 0\,, \qquad \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

ii)

$$\frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\cos(n!\pi)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

Tem-se $\dfrac{\pm 1}{n^2+1} \to 0$ vindo $\dfrac{\cos(n!\pi)}{n^2+1} \to 0$

Por outro lado

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \to 1/4 < 1 \Rightarrow \frac{(n!)^2}{(2n)!} \to 0$$

A sucessão v_n é convergente pois resulta da soma de duas sucessões convergentes tendo por limite 0.

iii)

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}+(n+1)!}\frac{3^n+n!}{n^n} = \frac{1+\dfrac{3^n}{n!}}{1+\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e > 1$$

vindo

$$w_n = \frac{n^n}{3^n+n!} \to +\infty$$

■

Exerc 2.6.8. *Sejam x_n, y_n sucessões convergentes. Se $x_n \leq y_n$ $n \in \mathbb{N}$ então* $\lim x_n \leq \lim y_n$

Resolução.
A demonstração reduz-se a mostrar que a sucessão convergente

$$z_n = y_n - x_n \geq 0, \ z_n \ \text{ tem limite e que } \qquad z = \lim z_n \geq 0.$$

Por contradição suponha-se que $z < 0$.
Sendo z_n convergente

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \ : \quad n > p \quad -\epsilon < z_n - z < \epsilon$$

Se $\epsilon = -z > 0$, da desigualdade anterior, $z_n < 0$ o que não é possível.
■

2.6.2 Enunciados de exercícios

Exerc 2.6.1. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{4}({x_n}^2 + 1)$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é monótona.

ii) A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Exerc 2.6.2. *Considere a sucessão de termos em $[0, 9]$ definida por*

$$a_1 = 1, \ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que a_n é crescente.

ii) A sucessão é convergente? Justifique.

iii) Determine o conjunto dos sublimites da sucessão $b_n = a_n + (n!)^{-1/n}$.

Exerc 2.6.3. *Considere a sucessão x_n, definida por*

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 3}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão é monótona.

ii) A sucessão x_n é convergente? Justifique.

Exerc 2.6.4. *Considere a sucessão definida por*

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{5}u_n^2 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que $|u_n| \leq 2 \quad , n \in \mathbb{N}$.

ii) A sucessão u_n *é contractiva? Justifique.*

iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Exerc 2.6.5. *Qualquer subsucessão de uma sucessão estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é majorado é convergente em* $\mathbb{R}$*? Justifique*

Exerc 2.6.6. *Considere a sucessão definida por*

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que u_n *com termos em* $[2, 3]$ *é uma sucessão decrescente.*

ii) A sucessão u_n *é convergente? Justifique*

iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$$

Exerc 2.6.7. *A sucessão* w_n *de termos positivos tal que* $w_{n+1}/w_n \geq 1, \ n \in$ *pode ter como sublimite zero? Justifique.*

Exerc 2.6.8. *Indique, se existirem, os limites das sucessões de termos gerais:*

$$a_n = \frac{3^{-n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad b_n = \sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\, 2^{-n}}$$

$$c_n = \frac{n^3}{1 + 2^{-n}} + \frac{1-e}{e^n} \qquad d_n = \frac{n^5 + n!}{(2n)!}$$

$$e_n = \frac{5^{-n}}{1 - 5^{-n}} \qquad r_n = \frac{n^n}{2^{2n}(n+1)!}$$

$$s_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{1 + 2\sqrt{n^3+1}} \qquad t_n = \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}}$$

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} + (1 + \frac{1}{2n})^n \qquad v_n = (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$w_n = \frac{3^{-n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \qquad x_n = \sqrt[n]{(n+1)^{n+1}\, 2^{-n}}$$

Justifique abreviadamente as respostas.

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.