# Capítulo 3

# Funções reais de variável real.
## Continuidade. Diferenciabilidade.

Este capítulo tem como primeiro objectivo desenvolver as bases da teoria da continuidade de funções reais de variável real. Introduzem-se os conceitos de continuidade local à Cauchy e à Heine, conceitos que se relacionam com a noção de limite. Estabelecem-se para funções contínuas em conjuntos limitados e fechados importantes propriedades, em particular introduzem-se o teorema da limitação, o teorema de Bolzano e o teorema de Weierstrass.
O segundo objectivo do capítulo é estabelecer os principais resultados da teoria da diferenciabilidade para funções reais de variável real. Define-se função derivada e relaciona-se com o conceito de função contínua. Analisa-se a derivada da função composta e a derivada da função inversa. Estabelecem-se o teorema de Rolle e o teorema de Lagrange. Estabelece-se o teorema de Cauchy analisando-se em particular a regra de Cauchy e a sua aplicação ao levantamento de indeterminações. Introduz-se o conceito de derivada de ordem superior e estabelece-se o teorema de Taylor discutindo algumas das suas aplicações, em particular, a extremos de funções. Conclui-se o capítulo com a análise de assíntotas ao gráfico de uma função.

## 3.1 Definição de função real de variável real

Designa-se por função real de variável real uma correspondência unívoca entre dois subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}$$

Definir uma função é indicar o conjunto D designado por domínio e uma expressão algébrica que faz corresponder a cada elemento $x \in D$ um único

$f(x) \in C$.
Se se indicar uma função sem definir explicitamente o domínio subentende-se que o domínio é o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão algébrica utilizada na definição da função designa um número real.

**Exemplo 3.1.1.** *Seja a função polinomial*

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$$

*e a função racional*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}, \qquad b_m \neq 0, \quad b_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, m$$

Estas funções não tendo explicitamente indicados os domínios têm como domínios respectivamente $\mathbb{R}$ e $\{x \in \mathbb{R} \,:\, b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \neq 0\}$.

Designa-se por *contradomínio* de $f$ o conjunto das imagens dos elementos do domínio por meio de $f$

$$C = \{y \in \mathbb{R} : \quad y = f(x), \quad x \in D\}$$

**Exemplo 3.1.2.** *Sejam as funções definidas em* $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^2 \qquad e \qquad f_2(x) = \operatorname{sen} x$$

*Os contradomínios destas funções são, respectivamente,* $C_{f_1} = [0, +\infty[$ *e* $C_{f_2} = [-1, 1]$.

Defina-se de seguida operações algébricas entre funções.

**Definição 3.1.3.** *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Em* $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ *definem-se as funções* $f + g$, $f - g$, $fg$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

*e para* $x \in D_f \cap D_g$, *e tal que* $g(x) \neq 0$, *a função* $f/g$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Exemplo 3.1.4.** *Sendo* $f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *e* $f_2(x) = \sqrt{x - 1}$ *defina-se* $f_1 + f_2$.

Tem-se $D_{f_1} = [-2, 2]$, $D_{f_2} = [1, +\infty[$ e para $x \in D_{f_1+f_2} = [1, 2]$

$$(f_1 + f_2)(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x - 1}$$

Conclui-se a secção introduzindo a noção de função composta.

**Definição 3.1.5.** *Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*Se $D_g$ tem um subconjunto $X \neq \emptyset$, tal que para $x \in X$ se tem $g(x) \in D_f$, define-se a função composta por*

$$f \circ g : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

*em que*

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \in D_g \ \wedge \ g(x) \in D_f\}$$

**Exemplo 3.1.6.** *Seja $f_1(x) = \sqrt{x}$ e $f_2(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 1}$ em que $D_{f_1} = [0, +\infty[$ e $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq -1\}$.*

Tem-se para a função composta $f_1 \circ f_2$

$$(f_1 \circ f_2)(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x + 1}}, \qquad \text{em que} \qquad D_{f_1 \circ f_2} = ]-\infty, -3] \cup ]-1, 3]$$

## 3.2 Continuidade local à Cauchy e à Heine

Inicie-se em seguida o estudo local da continuidade

**Definição 3.2.7.** *A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$ à Cauchy se e só se*

$$\underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{\epsilon>0}{\exists} \ \underset{x \in D}{\forall} \ |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Assim $f$ é contínua à Cauchy em $a \in D$ se e só se escolhida arbitrariamente uma vizinhança de $f(a)$, $V_\delta(f(a))$, existir sempre uma vizinhança de $a$, $V_\epsilon(a)$, tal que para $x \in D \cap V_\epsilon(a)$ se tenha $f(x) \in V_\delta(f(a))$.
Como consequência da definição anterior $f$ não é contínua em $a \in D$ se e só se

$$\underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{x \in D \cap |x-a|<\epsilon}{\exists} \ |f(x) - f(a)| \geq \delta$$

**Exemplo 3.2.8.** *Seja* $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. *Mostre que* $f$ *é contínua em* $a \in \mathbb{R}$.

A função $f$ é contínua em $a = 0$. De facto $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \delta$ se $0 \leq x < \delta^2$ ou seja se $x \in V_{\epsilon=\delta^2}(0) \cap [0, +\infty[$
Mostre-se que se $a \neq 0$, a função $f$ é também contínua em $a$. Tem-se

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

Assim se $x \in [0, +\infty[$ e $|x - a| < \sqrt{a}\delta = \epsilon$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

**Exemplo 3.2.9.** *Seja*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Mostre que* $D$ *não é contínua em* $a \in \mathbb{R}$.

A função $D$ não é contínua para nenhum $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pois existe $\delta = 1$ tal que qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe sempre $x \in V_\epsilon(a)$ tal que

$$|D(x) - D(a)| \geq 1$$

De facto se $x \in V_\epsilon(a)$ é racional a desigualdade anterior verifica-se. Analogamente se conclui que $D$ não é contínua para $a \in \mathbb{Q}$.

**Definição 3.2.10.** *A função* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua à Heine em* $a \in D$ *se a sucessão* $f(x_n)$ *converge para* $f(a)$ *sempre que a sucessão* $x_n$ *de termos em* $D$ *convirga para* $a$.

**Exemplo 3.2.11.** *Sendo a função seno contínua em* $\frac{\pi}{2}$ *é possível determinar o limite da sucessão* $\operatorname{sen}(\frac{\pi n^2}{1+2n^2})$*? Justifique.*

A sucessão $x_n = \frac{\pi n^2}{1+2n^2}$ é convergente para $\frac{\pi}{2}$. Consequentemente sendo o seno uma função contínua tem-se $\lim \operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(\lim x_n) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$.

**Teorema 3.2.12.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in D$. *A definição de continuidade à Heine em* $a \in D$ *é equivalente à definição de continuidade à Cauchy em* $a \in D$.

**Demonstração.**
• Mostre-se que se $f$ é contínua à Heine em $a \in D$ então é contínua à Cauchy em $a \in D$.
Seja $f$ não contínua à Cauchy em $a$ e mostre-se que existe uma sucessão $x_n \in D$ convergente para $a$ tal que $f(x_n)$ não é convergente para $f(a)$.
Não sendo $f$ contínua à Cauchy em $a$ existe $\delta > 0$ tal que para todo o $\epsilon > 0$ existe $x \in D$ tal que

$$|x - a| < \epsilon \qquad \text{e} \qquad |f(x) - f(a)| \geq \delta$$

Fixado $\delta$ e considerando $\epsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha-se $x_n \in D$ tal que

$$|x_n - a| < 1/n \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(a)| \geq \delta$$

A sucessão $x_n$ converge para $a$ e $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, i.e. a função $f$ não é contínua à Heine em $a \in D$.
• Mostre-se agora que se $f$ é contínua à Cauchy em $a \in D$ então é contínua à Heine em $a \in D$.
Seja $x_n \in D$ uma sucessão convergente para $a \in D$. Fixado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para $x \in D$ e $|x - a| < \epsilon$ se tem $|f(x) - f(a)| < \delta$. Ora como $x_n \to a$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$, $|x_n - a| < \epsilon$ Assim como $x_n \in D$ ter-se-á também $|f(x_n) - f(a)| < \delta$, o que mostra que $f(x_n)$ é convergente para $f(a)$. ■

Demonstra-se facilmente, usando o conceito de continuidade à Heine, o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.13.** *Se $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D$ também são funções contínuas em $a$ as funções $f \pm g$, $fg$ e, na hipótese de $g(a) \neq 0$, a função $f/g$.*

**Exemplo 3.2.14.** *A função constante $f_0(x) = 1$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$.*

De facto

$$\underset{\delta>0}{\forall} |f_0(x) - f_0(a)| = |1 - 1| = 0 < \delta$$

**Exemplo 3.2.15.** *A função $f_1(x) = x$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$.*

De facto

$$\underset{\delta>0}{\forall} \underset{\epsilon=\delta}{\exists} \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f_1(x) - f_1(a)| = |x - a| < \epsilon = \delta$$

Mais geralmente do teorema 3.2.13 pode concluir-se que qualquer função polinomial $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$ e que qualquer função

racional $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ em que $P_n, P_m$ são polinómios sem factores comuns, é contínua em $\mathbb{R} \setminus A$ em que $A = \{r_1, \ldots, r_p\}$ , $p \leq m$ é o conjunto dos zeros do polinómio $P_m$.

O resultado seguinte estabelece a continuidade da função composta.

**Teorema 3.2.16.** *Sejam as funções $f, g$ e $a \in \mathbb{R}$. Se a função $g$ é contínua em $a$ e se a função $f$ é contínua em $b = g(a)$ então a função $f \circ g$ é contínua em $a$.*

**Demonstração.**
Seja $g : D_g \longrightarrow D_f \subset \mathbb{R}$, $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_g \subset \mathbb{R}$.
Sendo $g$ contínua em $a$ e $f$ contínua em $g(a)$, tem-se qualquer que seja $x_n \in D_g$

$$x_n \longrightarrow a \Rightarrow g(x_n) \longrightarrow g(a)$$

e qualquer que seja $y_n = g(x_n) \in D_f$

$$y_n \longrightarrow g(a) \Rightarrow f(y_n) \longrightarrow f(g(a))$$

Conclui-se assim que

$$\lim(f \circ g)(x_n) = \lim f(g(x_n)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

ou seja que $f \circ g$ é contínua em $a$.

■

**Exemplo 3.2.17.** *Analise-se a continuidade da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

i) Se $a = 0$ tem-se

$$|f(x) - 0| = |x||\operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|, \quad x \neq 0$$

e basta escolher $\epsilon = \delta$ para concluir que a função $f$ é contínua em 0

ii) Se $a \neq 0$ a função é contínua por aplicação dos teoremas 3.2.13 e 3.2.16.

## 3.3 Definição de limite. Limites laterais.

Vai-se introduzir a noção de limite de função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quando a variável independente tende para $a$ ponto de acumulação [1] de $D$.

**Definição 3.3.18.** *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$. Diz-se que $f$ tem limite $l$ quando $x \to a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, se e só se*

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ x \in D \wedge 0 < |x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta.$$

**Teorema 3.3.19.** *Se $f$ tem limite quando $x \to a$, esse limite é único.*

**Demonstração.** *
Considerem-se $b, b' \in \mathbb{R}$, $b \neq b'$, tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b'$.
Qualquer que seja $\delta > 0$ existe então por um lado $\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta \qquad \text{para} \quad x \in V_\epsilon(a) \cap D \setminus \{a\}\,,$$

e por outro $\epsilon' > 0$ tal que

$$|f(x) - b'| < \delta \qquad \text{para} \quad x \in V_{\epsilon'}(a) \cap D \setminus \{a\}\,.$$

Escolhendo $x_0 \in V_\epsilon(a) \cap V_{\epsilon'}(a) \cap D \setminus \{a\}$ tem-se

$$0 < |b - b'| = |b - f(x_0) + f(x_0) - b'| \leq |f(x_0) - b| + |f(x_0) - b'| < 2\delta$$

Ora a condição $0 < |b - b'| < 2\delta$ para $\delta$ um real positivo arbitrário é impossível. ■

**Exemplo 3.3.20.** *Seja $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Mostre-se, usando a definição de limite, que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Tem-se

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon=\delta}{\exists}\ 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 0| = |x| < \epsilon = \delta$$

[1] $a$ é ponto de acumulação de $D$ se qualquer que seja $V_\epsilon(a)$, $\epsilon > 0$, existe $b \in V_\epsilon(a)$, tal que $b \in D \wedge b \neq a$. Designa-se por $D'$, o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $D$. Se $a \in D$ não for ponto de acumulação diz-se ponto isolado de $D$.

**Exemplo 3.3.21.** *Seja* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x| & se \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

*Mostre-se, usando a definição de limite, que*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Tem-se

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{\epsilon = \delta}{\exists} \ 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 0| = ||x| - 0| = |x| < \epsilon = \delta$$

Facilmente se demonstra o seguinte resultado.

**Teorema 3.3.22.** *Seja* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Então* $f$ *tem limite* $l$ *em* $a \in D'$ *se e só se qualquer que seja* $x_n \in D$ *e* $x_n \neq a$, *se* $x_n \to a$ *então* $f(x_n) \longrightarrow l$.

**Exemplo 3.3.23.** *Analise a existência de limite quando* $x \to 0$ *da função*

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{sen}(1/x).$$

Considerem-se as sucessões

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0 \ \text{ e } \ x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$$

Tem-se

$$\lim g(x_n) = \lim \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \ \text{ e } \ \lim g(x'_n) = \lim \operatorname{sen}(\pi/2 + 2n\pi) = 1$$

Assim não existe limite de $g$ quando $x \to 0$.

**Teorema 3.3.24.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$ *um ponto não isolado de* $D$. *Então* $f$ *é contínua em* $a$ *se e só se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

**Demonstração.**

• Seja $f$ contínua em $a$

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{\epsilon > 0}{\exists} \ x \in D \wedge |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Então obviamente $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ .

•

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ x \in D \wedge 0 < |x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Uma vez que $f(x)|_{x=a} - f(a) = 0$ pode eliminar-se a condição $|x-a| > 0$ e concluir-se que a função $f$ é contínua em $a$.

■

Introduza-se as noções de limites laterais à direita e à esquerda.

**Definição 3.3.25.** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'$ e, sendo $D_d = D \cap ]a, +\infty[$, $D_e = D \cap ]-\infty, a]$,*

$$f_d = f|_{D_d} \qquad f_e = f|_{D_e}$$

*Por definição designa-se por limite lateral à direita em $a$*

$$\lim_{x\to a} f_d(x) = f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

*e por limite lateral à esquerda em $a$*

$$\lim_{x\to a} f_e(x) = f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Facilmente se conclui que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se e só se existem $f(a^+), f(a^-)$ e $f(a^+) = f(a^-)$.

**Exemplo 3.3.26.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & se \quad |x| \leq 1 \\ \\ 1 - x^2 & se \quad |x| > 1. \end{cases}$$

*Determine-se $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.*

A função $f$ é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ pois é polinomial. Tem-se

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 - x^2) = 0 = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 0 = f(1),$$

sendo a função $f$ contínua em 1.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 1) = 0 = \lim_{x\to -1^-} -(1 - x^2) = 0 = f(-1),$$

sendo a função $f$ contínua em $-1$.

Relacione-se a propriedade de monotonia de uma função com a existência de limites laterais.

**Definição 3.3.27.** *Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*A função $f$ é uma função crescente se quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in D$,*

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

*A função $f$ é uma função decrescente se quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in D$,*

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

*A função $f$ é monótona se é uma função crescente ou decrescente.*

**Teorema 3.3.28.** *Se a função $f$ é monótona em $I = ]a, b[$, em qualquer ponto interior de $I$, $c \in I$, existem os limites laterais $f(c^+)$ e $f(c^-)$ i.e. as descontinuidades da função $f$ são de primeira espécie.*

**Demonstração.**
Seja $f$ crescente em $I$. Mostre-se que para $c \in int\, I$ existe $f(c^-)$.
A função $f$ é majorada em $]a, c[$ por $f(c)$, existe assim supremo

$$s = \sup_{x \in ]a,c[} f(x) \leq f(c)$$

Da definição de supremo tem-se

- $f(x) \leq s, \underset{x \in ]a,c[}{\forall}$
- $\underset{\delta > 0}{\forall} \underset{\alpha \in ]a,c[}{\exists} : f(\alpha) > s - \delta,$

Ora como $f$ é crescente em $I$

$$f(x) > f(\alpha) > s - \delta, \qquad \underset{x \in ]\alpha,c[}{\forall}$$

Assim para $\alpha < x < c$

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \; s - \delta < f(x) \leq s \Leftrightarrow f(c^-) = s = \sup_{x \in ]a,c[} f(x)$$

Analogamente se mostra que existe

$$f(c^+) = t = \inf_{x \in ]c,b[} f(x)\,.$$

■

**Observação 3.3.29.** *Sendo a função $f$ crescente em $]a,b[$, $f$ é uma função majorada em $]a,c[$ e minorada em $]c,b[$ tendo-se $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$.*

Mesmo quando $a$ e $b$ não pertencem a $\mathbb{R}$ pode definir-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

generalizando a noção anterior de limite. Em particular:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se e só se

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall} x > 1/\epsilon \Rightarrow f(x) < -1/\delta$$

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ se e só se

$$\underset{k>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall} a < x < a+\epsilon \Rightarrow f(x) > k\,.$$

## 3.4 Funções contínuas em intervalos.

**Definição 3.4.30.** *Seja $f : A \subset D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $f$ é contínua em $A$ se e só se $f$ é contínua para qualquer $a \in A$.*

A função $f$ é contínua em $A \subset D \subset \mathbb{R}$ se e só se $f|_A$ for contínua. As funções que são contínuas em conjuntos limitados e fechados [2] têm propriedades especiais.

Antes de enunciar o teorema da limitação de $f$, recorde-se a noção de função limitada em $A \subset D$.

**Definição 3.4.31.** *A função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada em $A \subset D$ se existir $M \in \mathbb{R}^+$ tal que qualquer que seja $x \in A$*

$$|f(x)| \leq M$$

*i.e se é limitado o conjunto*

$$f(A) = \{f(x)\ :\ x \in A\}\,.$$

[2] $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado se e só se qualquer sucessão de termos em $A$ convergente, converge para um elementos de $A$. Sendo $A$ um conjunto fechado limitado e não vazio, o $\sup A$ e o $\inf A$ pertencem ao conjunto.

**Teorema 3.4.32** (Teorema da limitação de $f$). *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em $I$ então $f$ é uma função limitada em $I$.*

**Demonstração.**
Suponha-se que a função $f$ não é limitada. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in I$ tal que

$$|f(x_n)| > n$$

Mas sendo $x_n$ uma sucessão limitada uma vez que $I$ é um intervalo limitado tem uma subsucessão convergente $x_{n_k}$, o que, atendendo a que $I$ é fechado conduz a que $x_{n_k} \longrightarrow x \in I$.
Ora $f$ é contínua em $x$ vindo $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$. Assim $f(x_{n_k})$ é uma sucessão limitada o que contraria

$$|f(x_{n_k})| > n_k \, .$$

■

Em seguida considere-se o teorema do valor intermédio que traduz de forma abreviada mas pouco precisa, que uma função contínua num intervalo limitado e fechado não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

**Teorema 3.4.33** (Teorema de Bolzano ou teorema do valor intermédio). *Seja*

- *$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado.*
- *$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em $I$.*
- *$f(a) \neq f(b)$.*

*Então qualquer que seja $k$ estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in ]a, b[$ tal que*

$$f(c) = k.$$

**Demonstração.** *
Vai-se supor que $f(a) \leq k \leq f(b)$. Divida-se o intervalo $[a, b]$ a meio. Para um dos dois intervalos obtidos por exemplo $[a_1, b_1]$ tem-se $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$. Fazendo a divisão a meio deste intervalo obtém-se um segundo intervalo $[a_2, b_2]$ satisfazendo $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$. Repetindo sucessivamente este processo obtém-se uma sucessão de intervalos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

tal que, para qualquer $n$, se tem

$$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

Pelo princípio dos intervalos encaixados [3] existe um ponto $c$ comum a todos os intervalos tal que

$$c = \lim\ a_n = \lim\ b_n$$

Ora sendo a função $f$ contínua em $c$ tem-se precisamente

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = k$$

Se $f(a) \geq k \geq f(b)$ a demonstração reduz-se à anterior substituindo $f(x)$ por $-f(x)$.

■

Consequência imediata do terorema de Bolzano são os corolários seguintes

**Corolário 3.4.34.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que não se anula em $I = [a, b]$. Então os valores de $f(x)$ qualquer que seja $x \in I$ têm o mesmo sinal.*

**Corolário 3.4.35.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $I = [a, b]$. Se $f(a).f(b) < 0$ a equação*

$$f(x) = 0$$

*tem pelo menos uma solução em $]a, b[$.*

**Exemplo 3.4.36.** *Sendo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua mostre que existe um ponto fixo de $f$ (existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$).*

Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ uma função contínua em $[0, 1] = I$. Demonstre-se por absurdo a existência de ponto fixo.
Se $g(x) \neq 0$, $x \in I$, pelo teorema de Bolzano $g(x) > 0$ ou $g(x) < 0$. Ora atendendo a que

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0, \qquad g(0) = f(0) \geq 0$$

conclui-se que existe $x \in I$ tal que $g(x) = 0$.

**Definição 3.4.37.** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*

- *$f$ tem máximo em $I$ se existir $x_M \in I$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_M)\,, \qquad x \in I$$

- *$f$ tem minimo em $I$ se existir $x_m \in I$ tal que*

$$f(x) \geq f(x_m)\,, \qquad x \in I\,.$$

[3] Seja $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de intervalos limitados e fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$ então (i) $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \neq \emptyset$, (ii) Se $\inf\{b_n - a_n\} = 0$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{c\}\,, \quad c \in \mathbb{R}$.

**Teorema 3.4.38** (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em $I$. Então $f$ tem máximo e mínimo em $I$.*

**Demonstração.**
Sendo $f(I)$ é um conjunto limitado tem supremo e infimo em $\mathbb{R}$ e se $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$ pertencem ao conjunto $f(I)$ são o valor, respectivamente, máximo e mínimo da função.
Se $f(I)$ é um conjunto fechado tem-se que $\sup f(I)$, $\inf f(I) \in f(I)$. Mostre-se que $f(I)$ é um conjunto fechado. Sendo $y_n \in f(I)$ uma sucessão convergente, mostre-se que $\lim y_n \in f(I)$.
Seja a sucessão $y_n = f(x_n)$ em que $x_n$ é uma sucessão limitada já que $x_n \in I$. A sucessão $x_n$ tem uma subsucessão convergente $x_{n_k}$ tal que $x_{n_k} \to x \in I$ pois $I$ é fechado.
Por outro lado como $f$ é uma função contínua

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(I).$$

Sendo $y_{n_k}$ uma subsucessão de $y_n$ tem-se assim que $y_n \to y \in f(I)$ concluindo-se que $f(I)$ é um conjunto fechado. ■

**Exemplo 3.4.39.** $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

$$\max\ f([-1, 1]) = 1 \qquad \min\ f([-1, 1]) = 0$$

Quando não é satisfeita alguma das hipóteses do teorema de Weierstrass pode não existir máximo ou mínimo.

**Exemplo 3.4.40.** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Tem-se que $g$ é contínua em $]0, 1] = I$, mas em $I$ tem mínimo, mas não tem máximo, nem sequer supremo.

**Exemplo 3.4.41.** *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.*

A função $h$ tem máximo, mas não tem mínimo.

Evidentemente uma função pode ter máximo e mínimo num determinado conjunto sem que sejam verificadas as condições do teorema de Weierstrass.

As condições são suficientes, mas nenhuma delas é necessária. Por exemplo, a função de Dirichlet,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

é uma função com máximo e mínimo em qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.

**Teorema 3.4.42.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \to \mathbb{R}$, uma função contínua em $I$ então $f(I)$ é um intervalo limitado e fechado.*

**Demonstração.**
Se $f(I)$ é limitado então existem $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$ e sendo $f(I)$ fechado, $\sup f(I), \inf f(I) \in f(I)$.
Sejam $M = \sup f(I)$ e $m = \inf f(I)$. Tem-se naturalmente que $f(I) \subset [m, M]$. Pretende-se mostrar que $f(I) = [m, M]$.
Sejam $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$. Do teorema de Bolzano tem-se que que $f$ assume todos os valores entre $f(x_m)$ e $f(x_M)$ assim $f(I) = [m, M]$. ■

**Observação 3.4.43.** *A propriedade anterior não é exclusiva das funções contínuas. Sem ser contínua, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

*transforma um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ num intervalo.*

**Observação 3.4.44.** *Em geral $f(I) \neq [f(a), f(b)]$. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Tem-se*

$$f(I) = [0, 1] \qquad e \qquad f(-1) = f(1) = 1\,.$$

**Exemplo 3.4.45.** *Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, uma função contínua positiva. Mostre que existe $\alpha > 0$ tal que*

$$g(x) \geq \alpha, \qquad x \in I = [0, 1]$$

Pelo teorema 3.4.42, $g(I) = [\alpha, \beta]$. Mostre-se que $\alpha > 0$.
Admita-se que $\alpha = 0$. Então existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$g(c) = \alpha = 0$$

o que não é possível pois $g(x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

**Teorema 3.4.46.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona em $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f$ transforma o intervalo $I$ no intervalo $f(I)$ então $f$ é contínua em $I$.*

**Demonstração.**
Seja $f$ crescente em $I$ e admita-se que em $c \in I$ a função $f$ não é contínua. Tem-se

$$f(c^-) \neq f(c) \Rightarrow f(c^-) < f(c)$$

ou

$$f(c) \neq f(c^+) \Rightarrow f(c) < f(c^+)$$

O facto de $f$ ser crescente leva a que $f$ não possa assumir um valor entre $f(c^-)$ e $f(c)$ na primeira hipótese, ou entre $f(c)$ e $f(c^+)$ na segunda hipótese. Assim se $f$ não é contínua $f(I)$ não é um intervalo o que contraria a hipótese.
■

## 3.5 Continuidade da função inversa.

Comece-se por relacionar a monotonia com a injectividade de funções reais. Se $f$ é estritamente monótona, evidentemente que é injectiva. Pode mostrar-se também facilmente como consequência do teorema de Bolzano que:

**Proposição 3.5.47.** *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injectiva em $[a, b]$ então $f$ é estritamente monótona em $[a, b]$.*

Introduza-se de seguida a definição de função inversa.

**Definição 3.5.48.** *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função injectiva.*
*Diz-se que a função $f$ tem inversa se existe uma função $g : f(A) \longrightarrow A$ tal que*

$$g(f(x)) = x, \qquad x \in A$$

$$f(g(y)) = y, \qquad y \in f(A)$$

**Observação 3.5.49.** *Os pontos do gráfico de $g$ obtêm-se dos pontos do gráfico de $f$ simplesmente trocando as coordenadas. O gráfico de $g$ resulta de refletir o gráfico de $f$ na recta $y = x$.*

**Exemplo 3.5.50.** *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. A função $f$ tem inversa, sendo a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(y) = \sqrt{y}$ a inversa de $f$.*

Passando à continuidade da função inversa tem-se

**Teorema 3.5.51.** *Seja $I = [a, b]$ um intervalo limitado e fechado e a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função estritamente monótona e contínua em $I$. Então existe a função inversa da função $f$ que é estritamente monótona e contínua em $f(I)$.*

**Demonstração.**
Seja $f$ estritamente crescente. Consequentemente $f$ é injectiva e existe $g : J \longrightarrow I$ tal que $f(g(y)) = y$, $y \in J = f(I)$.
Verifique-se que $g$ é estritamente crescente.
Seja $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Admita-se que $x_1 \geq x_2$. Então

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$$

o que não é possível vindo

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(y_1) = g(f(x_1)) < g(y_2) = g(f(x_2)).$$

Quanto à análise da continuidade da função inversa tem-se que a função $g$ transforma o intervalo $f(I)$ em $I$. Ora se $g$ é uma função monótona em $I$ e se $g(I)$ é um intervalo conclui-se que a função $g$ é contínua.
■

**Exemplo 3.5.52.**
*A função arco-seno é a inversa da função seno, restrita a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ou seja tem-se*

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \wedge \operatorname{sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} y$$

*A função arco-coseno é a inversa da função coseno restrita a $[0, \pi]$ ou seja tem-se*

$$x \in [0, \pi] \wedge \cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$$

## 3.6 Diferenciabilidade. Função derivada

**Definição 3.6.1.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in int\, D$ [4].
*Designa-se razão incremental da função* $f$ *no ponto* $a$

$$g : D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Definição 3.6.2.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in intD$.
*A função* $f$ *tem derivada em* $a$ *se a razão incremental da função* $f$ *tem limite em* $\overline{\mathbb{R}}$ *quando* $x \to a$. *Tendo-se*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*A função* $f$ *diz-se diferenciável em* $a$ *se a derivada da função* $f$ *em* $a$ *é um número real.*

Note-se que sendo $x = a + h$ se tem também

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

**Observação 3.6.3.**
• *Quando* $f'(a)$ *existe e é real existe tangente ao gráfico de* $f$ *no ponto* $(a, f(a))$, *a recta que passa nesse ponto e tem declive* $f'(a)$:

$$y = f(a) + (x - a)f'(a)$$

• *Quando* $f'(a) = \pm\infty$ *a tangente ao gráfico de* $f$ *é a recta vertical de equação* $x = a$.
• *Quando para* $x \to a$ *e a razão incremental de* $f$ *não tem limite diz-se que o gráfico de* $f$ *não tem tangente em* $(a, f(a))$.

**Exemplo 3.6.4.**
*i) Seja* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$. *Determine a equação da recta tangente ao gráfico de* $g$ *em* $(0, 0)$.

*ii) Seja* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$. *Existe tangente ao gráfico de* $h$ *em* $(0, 0)$? *Justifique.*

*iii) Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. *Existe derivada em* $x = 0$? *Justifique.*

[4] $int\, D$ representa o conjunto dos pontos interiores de $D$. Um ponto $a \in D$ é ponto interior de $D$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(a) \subset D$.

i) Tem-se
$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$
sendo $y = x$ a tangente ao gráfico de $g$ em $(0, 0)$.

ii) Em $x = 0$, $h'(0) = +\infty$ e o gráfico da função $h$ tem tangente vertical de equação $x = 0$.

iii) Tem-se $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$. Assim não existe em $\mathbb{R}$ o limite da razão incremental $\frac{|x| - 0}{x - 0}$ e consequentemente não existe derivada em $x = 0$.

Este último exemplo sugere a noção de derivada lateral.

**Definição 3.6.5.** *Define-se derivada lateral à direita/esquerda, respectivamente, por*
$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad e \qquad f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A função $f$ tem derivada em $a$ se e só se existem as derivadas laterais de $f$ em $a$ com o mesmo valor.

**Exemplo 3.6.6.** *Considerando a função $f$ do exemplo anterior, tem-se* $f'_d(0) = 1$, $f'_e(0) = -1$

Uma função pode ser contínua num ponto onde não existe derivada. A continuidade nem sequer garante a existência de derivadas laterais.

**Exemplo 3.6.7.** *Seja*
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Quando $x \to 0$ não existe limite para a função $f$, nem sequer limites laterais pois
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

O exemplo que se apresenta de seguida, ilustra que a existência de derivada infinita não garante a continuidade.

**Exemplo 3.6.8.** *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Tem-se:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

vindo $f'(0) = +\infty$. A função contudo é descontínua em $x = 0$.

Relacione-se a noção de continuidade e a de diferenciabilidade.

**Teorema 3.6.9.** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in intD$.*
*Se a função $f$ é diferenciável em $a$ então a função $f$ é contínua em $a$.*

**Demonstração.**
Seja $g$ a razão incremental de $f$ em $a$. Tem-se para $x \in D \setminus \{a\}$

$$f(x) = f(a) + (x - a)g(x)$$

vindo

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + (x - a)g(x)) = f(a) + 0.f'(a)$$

Assim $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. ■

**Definição 3.6.10** (Função derivada de $f$)**.** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_1 \subset D$ o conjunto dos os pontos interiores a $D$ em que $f$ é diferenciável. Em $D_1$ define-se a função que em $x \in D_1$ tem por valor $f'(x)$ designada por função derivada*

$$f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longrightarrow f'(x)$$

A função $f : D_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $D_1 \subset D$ se e só se for diferenciável em qualquer $x \in D_1$. A função $f$ é uma função diferenciável em $D_1$ se e só se $f|_{D_1}$ é uma função diferenciável.

**Teorema 3.6.11.** *Se $f, g$ são funções diferenciáveis em $a$, as funções $f \pm g$, $f.g$ e $f/g$ são diferenciáveis em $a$ e*

*i)* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

*ii)* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

*iii)* $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *onde* $g(a) \neq 0$.

**Demonstração.**

i)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=$$

$$=f'(a)+g'(a)$$

ii) $\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$$

já que se $f$ é diferenciável em $a$ então $f$ é contínua em $a$ sendo $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$.

iii) Facilmente se conclui de $(ii)$, uma vez que $f/g=f.1/g$.

■

## 3.7 Derivada da função composta. Derivada da função inversa

**Teorema 3.7.12** (Derivação da função composta)**.** *Sejam $I, J$ intervalos abertos, e as funções $f, g$ tais que*

- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $f(I) \subset J$,
- $f$ *diferenciável em* $a$ *e* $g$ *é diferenciável em* $f(a)$.

*Então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em $a$ e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

**Demonstração.** *

Sendo $f$ uma função diferenciável em $a$ e $g$ uma função diferenciável em $b \in f(I)$, para $a \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$ considere-se [5]

$$f(a+h) - f(a) = h(f'(a) + \alpha(h))$$

e para $b \in f(I)$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $b + k \in f(I)$

$$g(b+k) - g(b) = k(g'(b) + \beta(k))$$

em que

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to 0} \beta(k) = 0\,.$$

Sendo $b = f(a)$ e $k = f(a+h) - f(a)$ tem-se

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = (f(a+h) - f(a))(g'(f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a)))$$

vindo para $\varphi = g \circ f$ e $h \neq 0$

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = (f'(a) + \alpha(h))(g'(f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a))$$

Assim uma vez que $\lim_{h \to 0} \alpha(h)) = 0$ e $\lim_{h \to 0} \beta(f(a+h) - f(a)) = 0$, tem-se

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = f'(a)g'(f(a)).$$

■

**Exemplo 3.7.14.** *Determine os conjuntos em que são diferenciáveis as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

*i)* $$f(x) = x|x|$$

*ii)*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

---

[5]

**Lema 3.7.13.** *[2] Se $f$ é diferenciável em $x_0$ então*

$$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \theta(x))\,(x - x_0)$$

*em que $\theta$ é uma função definida numa vizinhança de $x_0$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \theta(x) = \theta(x_0) = 0$$

i) A função $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ pois

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

A função $f$ é pois uma função diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Tem-se

$$f'(x) = 2|x|\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Por outro lado para $x = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x| \Rightarrow \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

Assim a função $f$ é diferenciável com derivada contínua em $\mathbb{R}$.

ii) Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $x \to \operatorname{sen} x$ e a função $x \to 1/x$ são diferenciáveis em todo o seu domínio e portanto a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $x \to \operatorname{sen}(1/x)$ é diferenciável no seu domínio com derivada

$$-1/x^2 \cos(1/x)$$

A função $g$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é pois diferenciável com derivada

$$g'(x) = -\cos(1/x) + 2x \operatorname{sen}(1/x).$$

Por outro lado para $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

concluindo-se que a função $g$ é diferenciável em zero sendo $g'(0) = 0$
Finalmente $g$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Note-se que a função $g'$ não tem limite quando $x \to 0$ sendo descontínua em 0.

**Teorema 3.7.15.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em $I$, diferenciável em $c \in \mathbb{R}$ com $f'(c) \neq 0$. Então a inversa de $f$, $g$, é diferenciável em $d = f(c)$. Sendo*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

**Demonstração.**
Seja $H(y)$ a razão incremental correspondente a $g(y)$

$$H(y) = \frac{g(y) - g(d)}{y - d}.$$

Sendo $g$ estritamente monótona então $g(y) \neq g(d)$ se $y \neq d$.
Considere-se

$$H_1(y) = \frac{y - d}{g(y) - g(d)}.$$

Existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

pois $f$ é diferenciável em $c$. Ora, como $x = g(y)$ e $c = g(d)$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(g(y)) - f(g(d))}{g(y) - g(d)} = \frac{y - d}{g(y) - g(d)} = H_1(y)$$

Quando $x \to c$ uma vez que a função $g$ é contínua, $y \to d$, assim

$$\lim_{y \to d} H_1(y) = f'(c)$$

i.e.

$$\lim_{y \to d} H(y) = \lim_{y \to d} \frac{1}{H_1(y)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

■

**Exemplo 3.7.16.** *Considere a função injectiva $f : ]-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}[ \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} x \arccos(-2x) & se \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & se \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} x \text{ e } \frac{x\pi}{2} & se \quad \frac{-2}{\pi} < x < 0. \end{cases}$$

*Calcule a derivada da função inversa em zero.*

Vai-se aplicar o teorema 3.7.15 e em particular a fórmula

$$\left(f^{-1}\right)'(d) = \frac{1}{f'(c)} \qquad \text{se} \quad f'(c) \neq 0$$

em que $d = 0 = f(c)$. Conclui-se neste caso de imediato que $c = 0$. Determine-se assim $f'(0)$. Tem-se

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\pi/2.x\,\mathrm{e}^{x\pi/2} - 0}{x - 0} = \pi/2$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \arccos(-2x) - 0}{x - 0} = \pi/2$$

concluindo-se que $f'(0) = \pi/2 \neq 0$.
Finalmente tem-se:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{\pi/2} = 2/\pi\,.$$

**Exemplo 3.7.17.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$. Calcule a derivada da função inversa.*

A função $f$ é estritamente monótona e contínua, diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ com derivada não nula.
Se $x > 0$, de $y = f(x) = x^2$ tem-se $g_1(y) = x = \sqrt{y}$, e se $x < 0$ de $y = f(x) = -x^2$ tem-se $g_2(y) = x = -\sqrt{-y}$
A derivada da função inversa da função $f$ é assim, para $x > 0$,

$$g_1'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

e para para $x < 0$,

$$g_2'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(-\sqrt{-y})} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}$$

Por outro lado sendo

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x}{x} = 0$$

para $g_1, g_2$ tem-se, respectivamente, à esquerda e à direita de zero

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y} - 0}{y} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to 0^-} \frac{-\sqrt{-y} - 0}{y} = +\infty$$

## 3.8 Extremos relativos. Teorema de Lagrange.

**Definição 3.8.18.** *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*Diz-se que $f$ tem um máximo relativo ou mínimo relativo em $c \in D$ se existe respectivamente uma vizinhança $\epsilon$ de $c$, $V_\epsilon(c)$, tal que*

$$f(x) \leq f(c)\,, \qquad x \in V_\epsilon(c) \cap D$$

*ou*

$$f(x) \geq f(c)\,, \qquad x \in V_\epsilon(c) \cap D$$

Diz-se que $f$ tem um extremo relativo em $c$, se tem um máximo ou um mínimo relativo em $c$.

Quando uma função tem máximo em todo o seu domínio esse máximo é também um máximo relativo. Sendo $f(c)$ o máximo em $D$ de $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ter-se-á, qualquer que seja $\epsilon > 0$, $f(x) \leq f(c)$, $x \in V_\epsilon(c) \cap D$. A reciproca não é evidentemente verdadeira.

**Exemplo 3.8.19.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Averigue se a função $f$ tem extremos.*

A função tem um mínimo absoluto em $x = 0$, uma vez que

$$f(x) \geq f(0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

**Teorema 3.8.20** (Extremo interior)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $c \in \operatorname{int} I$. Se $f$ tem um extremo relativo em $c$ e se $f$ é uma função diferenciável em $c$ então*

$$f'(c) = 0$$

**Demonstração.**
Suponha-se que $f$ tem minimo relativo em $c$. Existe então $\epsilon > 0$ tal que a diferença $f(x) - f(c)$ é maior ou igual a zero no conjunto $V_\epsilon(c) \cap D$.
Nesse conjunto tem-se assim

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x > c$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x < c$$

Existindo $f'(c)$ existem também com o mesmo valor $f'_e(c)$ e $f'_d(c)$. Ora das desigualdades anteriores tem-se

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x > c$$

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,, \qquad \text{se} \qquad x < c$$

Vindo da diferenciabilidade de $f$ em $c$ que $f'_e(c) = f'_d(c) = f'(c) = 0$.
Analogamente se demonstrava se $f$ tivesse um máximo relativo em $c$. ■

**Exemplo 3.8.21.** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x(x^2 - 1)$ uma função com extremos relativos. Determine os possíveis valores do domínio de $g$ que são extremos relativos.*

A função derivada de $g$ é $g'(x) = 3x^2 - 1$. A função $g$ tem em $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ possíveis extremos relativos.

**Observação 3.8.22.** *A reciproca do teorema 3.8.20 é falsa.*

**Exemplo 3.8.23.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. A função $f'(x) = 3x^2$ é a sua função derivada. Tem-se $f'(0) = 0$, contudo $f(0)$ não é extremo relativo de $f$.*

**Observação 3.8.24.** *Podem existir extremos locais em pontos onde a função não é diferenciável.*

**Exemplo 3.8.25.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se \quad x \geq 0 \\ \\ 1 + x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

*A função $f$ não é diferenciável em $x = 0$ e $f'(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Tem-se contudo $f(0)$ máximo absoluto e relativo, pois qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) \leq f(0) = 1$$

**Teorema 3.8.26** (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $b > a$, uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.*
*Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in ]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = 0\,.$$

**Demonstração.**
Pelo teorema de Weierstrass se a função $f$ é contínua em $[a, b]$ tem máximo $M$ e mínimo $m$ nesse intervalo. Se $M = m$ $f$ é constante em $[a, b]$ e portanto $f'$ anula-se em qualquer ponto de $]a, b[$. Se $M > m$ a hipótese $f(a) = f(b)$ permite reconhecer que pelo menos um dos pontos com imagem $M$ ou $m$ é atingido em $c \in ]a, b[$ vindo do teorema 3.8.20 $f'(c) = 0$. ■

**Observação 3.8.27** (Interpretação geométrica)**.** *O gráfico de uma função nas condições do teorema de Rolle entre dois pontos com a mesma ordenada tem sempre pelo menos um ponto de tangente horizontal.*

**Exemplo 3.8.28.** *Seja* $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(x) = x^2$. *A função é diferenciável em* $]-a, a[$ *e*

$$f(-a) = f(a) = a^2$$

A função $f$ tem tangente horizontal em $c \in ]-a, a[$ em particular em $c = 0$.

**Exemplo 3.8.29.** $g : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

$$g(-a) = g(a)$$

Não existe $c \in ]-a, a[$ tal que $g'(c) = 0$ pois a função $g$ não é diferenciável em $]-a, a[$, já que não é diferenciável em 0.

Facilmente se estabelecem os seguintes corolários do teorema de Rolle.

**Corolário 3.8.30.** *Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há pelo menos um zero da sua derivada.*

**Corolário 3.8.31.** *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo não pode haver mais de um zero dessa função.*

**Demonstração.**
Se existissem, por exemplo, dois zeros da função, existiria um terceiro zero da função derivada entre esses zeros o que contraria a hipótese dos zeros da derivada serem consecutivos. ■

**Teorema 3.8.32** (Teorema de Lagrange)**.** *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $]a, b[$.
*Então existe pelo menos* $c \in ]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Demonstração.**
Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a$$

A igualdade anterior mostra que a função $g(x) = f(x) - \lambda x$ tem valores iguais nos extremos do intervalo $[a, b]$. Sendo $g$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ o teorema de Rolle assegura a existência de $c \in ]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$ ou seja tal que

$$g'(c) = f'(c) - \lambda = 0$$

Concluindo-se que

$$f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

**Exemplo 3.8.33.** *Sendo $\alpha > 1$ mostre-se aplicando o teorema de Lagrange que:*

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x\,, \qquad x > 0$$

Aplique-se a $g(t) = (1 + t)^\alpha$ o teorema de Lagrange em $[0, x]$. Tem-se que existe $c \in ]0, x[$ tal que

$$\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x - 0} = \alpha(1 + c)^{\alpha - 1}.$$

Como $\alpha > 1$, $c > 0$ tem-se $\alpha(1 + c)^{\alpha-1} > 1$ vindo $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$, $x > 0$.

Estabeleçam-se alguns corolários do teorema de Lagrange.

**Corolário 3.8.34.** *Se $f'(x) = 0$, $x \in I = [a, b]$ então $f$ é constante em $I$.*

**Demonstração.**
Seja $x_1 < x_2$ e $x_1, x_2 \in I$. Estando a função $f$ nas condições do teorema de Lagrange

$$\underset{c \in ]x_1, x_2[}{\exists} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

concluindo-se que $f$ é uma função constante em $I$. ■

**Corolário 3.8.35.** *Se $f, g$ são duas funções diferenciáveis em $I = [a, b]$ e se para qualquer $x \in I$, $f'(x) = g'(x)$ então $f - g$ é constante em $I$.*

**Demonstração.**
Tem-se $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$, $x \in I$ vindo do corolário anterior que $f - g$ é uma função constante. ■

Considere-se finalmente um corolário importante na análise da injectividade de funções.

**Corolário 3.8.36.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.*
*Se $f'(x) > 0$ qualquer que seja $x \in ]a, b[$ ou $f'(x) < 0$ qualquer que seja $x \in ]a, b[$ então $f$ é respectivamente estritamente crescente em $[a, b]$ ou estritamente decrescente em $[a, b]$*

**Demonstração.**
Seja $f'(x) > 0$ qualquer que seja $x \in ]a, b[$. Se $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_2 > x_1$ tem-se em $[x_1, x_2]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad c \in ]x_1, x_2[.$$

Vindo

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) > 0 \qquad c \in ]x_1, x_2[.$$

Assim

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Concluindo-se que $f$ é uma função estritamente crescente em $[a, b]$. ■

## 3.9 Teorema de Cauchy. Regra de Cauchy

**Teorema 3.9.37** (Teorema de Cauchy)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0$, $x \in ]a, b[$. Então existe pelo menos $c \in ]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Demonstração.**
A função $g$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $g'(x) \neq 0$, $x \in ]a, b[$, concluindo-se do teorema de Rolle que $g(a) \neq g(b)$.

Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a).$$

Defina-se $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$. A função $h$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $h(a) = h(b)$. Pelo teorema de Rolle

$$\underset{c \in ]a,b[}{\exists} \quad h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0$$

concluindo-se que

$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Consequência directa do teorema anterior é o resultado seguinte designado por regra de Cauchy

**Teorema 3.9.38** (Regra de Cauchy)**.** *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis em $]a, b[$ verificando as condições*

*i)* $g'(x) \neq 0\,, \qquad x \in ]a, b[$

*ii)* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty)$

*Então se existe em $\overline{\mathbb{R}}$*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*existe*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*e*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demonstração.** *

Seja $l = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ e $\delta$ um número real positivo arbitrário. Determine-se $\beta \in ]a, b[$ por forma que se tenha, para $x \in ]a, \beta[$:

$$l - \delta < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \delta$$

Sendo $x, y$ dois pontos distintos do intervalo $]a, \beta[$, do teorema de Cauchy, existe um ponto $\xi$ entre $x$ e $y$ e consequentemente também no intervalo $]a, \beta[$ em que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Assim para quaisquer $x$ e $y$ nas condições indicadas

$$l - \delta < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < l + \delta$$

Considere-se a hipótese de $f$, $g$ tenderem para zero, quando $x$ tende para $a$. Fixado $x$ qualquer que seja de $]a, \beta[$, e fazendo $y \to a$ na desigualdade anterior, tem-se

$$l - \delta \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + \delta$$

e conclui-se assim que existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Analogamente se demonstra quando se considera a hipotese de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
■

**Observação 3.9.39.** *Pode existir* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e não existir* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Se $a \in int\, I = ]a_1, b_1[$ demonstra-se facilmente o corolário seguinte:

**Corolário 3.9.40.** *Seja $I$ um intervalo aberto, $a \in I$ e $f, g$ duas funções diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$. Se $g'(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{a\}$ e as funções tendem ambas para $0$ ou $\infty$ quando $x \to a$ então*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*sempre que o segundo limite exista em $\overline{\mathbb{R}}$.*

A regra de Cauchy permite resolver vários problemas de indeterminações. Considerem-se alguns exemplos

**Exemplo 3.9.41.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = 1/2$$

**Exemplo 3.9.42.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

De facto

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1 + x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1/(1 + x)}{1} = 1$$

**Exemplo 3.9.43.** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0.$

De facto

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}$$

vindo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

**Exemplo 3.9.44.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 0.$

De facto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}$$

vindo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

Antes de se considerar mais alguns exemplos de aplicação da regra de Cauchy defina-se para $x > 0$ a função $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = e^{\alpha\ln x} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e sendo $f(x) > 0$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 3.9.45.** *Determine-se* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\ln x}.$

Tem-se

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/\operatorname{sen} x)'} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{\cos x/\operatorname{sen}^2 x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\frac{1}{\cos x} = 0$$

assim

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1$$

**Exemplo 3.9.46.** *Determine-se* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln(1+1/x)}.$

Tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+1/x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

assim

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Exemplo 3.9.47.** *Determine-se* $\lim_{x\to+\infty} x^{1/(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/(x-1)\ln x}$.

Tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

assim

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/(x-1)} = 1$$

## 3.10 Derivadas de ordem superior. Fórmula de Taylor

Considerando uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, convenciona-se designar por $D_1$ o subconjunto de $D$ em que a função $f$ é diferenciável, domínio da função derivada $f'$. A função $f$ diz-se duas vezes diferenciável em $a \in D_1$, se $f'$ for diferenciável em $a$. Em $D_2$, conjunto em que $f'$ é diferenciável, define-se a segunda derivada $f''$, e mais geralmente tem-se:

**Definição 3.10.48.** *A derivada de ordem $n \in \mathbb{Z}_0^+$ de $f$, $f^{(n)}$, é definida por indução*

$$f^{(0)} = f, \qquad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \qquad n \in \mathbb{N}$$

*sendo o domínio de $f^{(n+1)}$, $D_{n+1}$, o conjunto em que $f^{(n)}$ é diferenciável.*

A função $f$ diz-se $n$-vezes diferenciável em $a \in D$ se e só se existirem as derivadas $f'(a)$, $f''(a), \ldots,$ $f^{(n)}(a)$. A função $f$ diz-se indefinidamente diferenciável em $a \in D$ se e só se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $f$ é $n$-vezes diferenciável em $a$.
Tem-se $f \in C^n(A)$ se e só se $f$ é $n$ vezes continuamente diferenciável no aberto $A$ ou seja se $f$ é $n$-vezes diferenciável em $A$ com $f^{(n)}$ função contínua em $A$.

**Exemplo 3.10.49.** *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 H(x)$
*Tem-se*

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \geq 0 \\ \\ 2x & se \quad x < 0. \end{cases}$$

*As derivadas de ordem superior não estão definidas em* $x = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x > 0 \\ \\ 2 & se \quad x < 0. \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 3 \qquad x \neq 0$$

**Observação 3.10.50.** *As funções elementares, por exemplo, a exponencial e a logarítmica, são funções indefinidamente diferenciáveis.*

Demonstra-se facilmente usando o princípio de indução matemática e os teoremas 3.6.11, 3.7.12, 3.7.15 a seguinte proposição.

**Proposição 3.10.51.** *Se* $f, g$ *são funções* $n$*-vezes diferenciáveis em* $a$*, também o são as funções* $f \pm g$*,* $fg$ *e* $f/g$ *se* $g(a) \neq 0$*. Tendo-se*

$$(f \pm g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \pm g^{(n)}(a)$$

*e*

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a)\,, \qquad \textit{(fórmula de Leibnitz)}$$

Aborde-se agora o problema da aproximação de funções reais de variável real por meio de polinómios. Em termos muito gerais a questão consiste em determinar o polinómio que melhor possa substituir a função $f$ sob certas condições com erro controlado. Comece-se por analisar, se um polinómio do 1º grau pode constituir uma boa aproximação local da função $f$.
Sendo a função $f$ diferenciável em $a$, o polinómio

$$p_1(x) = f(a) + (x - a) f'(a)$$

que verifica as condições

$$p_1(a) = f(a) \qquad \text{e} \qquad p_1'(a) = f'(a)$$

constitui uma boa aproximação local da função $f$. Geometricamente corresponde a substituir na vizinhança do ponto de abcissa $a$, a curva de equação $y = f(x)$ pela sua tangente nesse ponto o que leva a cometer-se o erro

$$r_1(x) = f(x) - p_1(x)$$

em que

$$\lim_{x\to a} \frac{r_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

representado simbolicamente por

$$r_1(x) = o(x-a) \qquad \text{quando} \quad x \to a$$

Conclui-se assim que, se a função $f$ é diferenciável em $a$

$$f(x) = p_1(x) + o(x-a) \qquad \text{quando} \quad x \to a$$

Analise-se, em seguida, a situação em que o polinómio que se pretende que aproxime a função $f$ é de grau $n$ sendo a aproximação num intervalo em vez de local. Esta análise conduz ao teorema de Taylor. O teorema de Taylor estabelece precisamente que é possível aproximar por um polinómio de grau $n$, uma função $n+1$ vezes diferenciável num dado intervalo. O teorema de Taylor fornece mesmo uma fórmula para o erro que se comete quando se substituir a função pelo polinómio, fórmula que em princípio permite obter um majorante do erro.

**Teorema 3.10.52** (Teorema de Taylor)**.** *Seja $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0, x \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que as funções $f, f', f'', ...f^{(n)}$ são contínuas em $I$ e $f^{(n+1)}$ existe em $]a,b[$ então*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \qquad \textit{(fórmula de Taylor)}$$

*em que*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

*é o polinómio de Taylor de grau $n$ relativo a $x_0$ e*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \qquad c \in ]x, x_0[$$

*é o resto de Lagrange.*

**Demonstração.**
Seja $J = [x, x_0]$ em que $x_0 > x$ e defina-se para $x$ fixo
$F : J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t),$$

tal que

$$F(t)\,|_{t=x_0} = f(x) - P_n(x)$$

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) + \frac{2(x-t)}{2} f''(t) - (x-t)f''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$$

Aplicando o teorema de Cauchy às funções $F$ e $G$, sendo a função $G$ definida por

$$G(t) = (x-t)^{n+1} \qquad t \in [x, x_0],$$

tem-se

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \qquad c \in ]x, x_0[$$

Para $x$ fixo $(t = x)$

$$F(x) = 0\,, \qquad G(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad G(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$$

vindo

$$\frac{F(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \frac{1}{-(n+1)(x-c)^n}$$

e finalmente

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

■

**Observação 3.10.53.** *Se $n = 0$ a fórmula de Taylor é equivalente ao teorema de Lagrange em $[x, x_0]$: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(c)$*

**Exemplo 3.10.54.** *Aproximar por um polinómio de Taylor de grau 2 em $x$ a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ e majorar o erro de aproximação no intervalo $I = [-1, 1]$.*

A função $f$ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se

$$f(x) = \cos x \hookrightarrow f(0) = 1 \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x \hookrightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \hookrightarrow f''(0) = -1 \qquad f'''(x) = \operatorname{sen} x \hookrightarrow f'''(c) = \operatorname{sen} c$$

Assim

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$$

em que $R_2(x) = \dfrac{x^3}{6} \operatorname{sen} c$.

Atendendo a que $|\operatorname{sen} c| \leq 1$ e $|x| \leq 1$ tem-se:

$$|R_2(x)| \leq 1/6 \qquad x \in [-1, 1]$$

## 3.11 A fórmula de Taylor e os extremos de uma função

É necessário, mas não suficiente, para que uma função $f$ diferenciável em $x_0$ tenha um extremo local, que $f'(x_0) = 0$. De uma forma geral chamam-se pontos de estacionaridade de uma função $f$ aos zeros da sua derivada. Para esclarecer se um ponto de estacionaridade é ou não um ponto de máximo ou minimo local têm-se, essencialmente, dois caminhos:
*i*) recorrer ao sinal da 1ª derivada.
(Por exemplo se $f'(x_0) = 0$ e $f'(x)$ é positiva em $]\alpha, x_0[$ e negativa em $]x_0, \beta[$, $\alpha < x_0 < \beta$, $f(x_0)$ é um máximo local de $f$)
*ii*) recorrer à fórmula de Taylor.

**Teorema 3.11.55.** *Seja $f :\to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ tal que:*
- *existem $f', f'', \ldots, f^{(n)}$;*
- *a função $f^{(n)}$ é contínua numa vizinhança de $x_0$;*
- $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ , f^{(n)}(x_0) \neq 0$

*então*
*i*) *se $n$ é par tem-se*
- *$f$ tem em $x_0$ um minimo local se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *$f$ tem em $x_0$ um máximo local se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

*ii*) *se $n$ é impar tem-se que $f$ não tem máximo local nem minimo local em $x_0$.*

**Demonstração.** Nas condições do teorema numa vizinhança de $x_0$ pode escrever-se a fórmula de Taylor de ordem $n - 1$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad c \in ]x_0, x[.$$

$i)$ Se $n$ é par, tem-se $(x-x_0)^n \geq 0$

- Seja $f^{(n)}(x_0) > 0$

Sendo $f^{(n)}$ contínua em $x_0$ existe uma vizinhança de $x_0$ em que $f^{(n)}(x) \geq 0$. Assim de $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \geq 0$ tem-se que $f(x) \geq f(x_0)$ ou seja existe minimo em $x_0$.

- Seja $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Analogamente tem-se $f(x) \leq f(x_0)$ ou seja existe máximo em $x_0$.

$ii)$ Se $n$ é impar, $(x-x_0)^n$ qualquer que seja a vizinhança de $x_0$ muda de sinal consoante $x > x_0$ ou $x < x_0$ consequentemente não existe máximo nem minimo. ■

A fórmula de Taylor permite também analisar a posição do gráfico de uma função na vizinhança de um ponto em relação à tangente ao gráfico nesse ponto.

Seja

- $f$ diferenciável em $x_0$
- $t(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(x_0)$ o gráfico de $f$ está por cima do gráfico de $t$ diz-se que a função $f$ é convexa em $x_0$ ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(x_0)$ o gráfico de $f$ está por baixo do gráfico de $t$ diz-se que a função $f$ é concava em $x_0$ ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Se existe $\epsilon > 0$ tal que num dos intervalos $]x_0-\epsilon, x_0[$ e $]x_0, x_0+\epsilon[$ o gráfico de $f$ está por cima do gráfico de $t$ e no outro o gráfico $t$ está por cima do gráfico de $f$ diz-se que $x_0$ é um ponto de inflexão de $f$ ou que o seu gráfico tem uma inflexão em $x_0$ (Se $f$ é contínua em $x_0$ e se $f'(x_0) = +\infty$ ou $f'(x_0) = -\infty$ também se diz que $f$ tem uma inflexão em $x_0$).

**Teorema 3.11.56.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, $x_0 \in I$ tal que:*

- *a função $f$ é $n$ vezes diferenciável;*
- *a função $f^{(n)}$ é contínua em $x_0 \in I$;*
- $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$

*então*

*$i)$ se $n$ é par tem-se que*

- *$f$ tem a concavidade voltada para cima em $x_0$ se $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *$f$ tem a concavidade voltada para baixo em $x_0$ se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

*$ii)$ se $n$ é impar tem-se que $x_0$ é ponto de inflexão.*

**Demonstração.** Numa vizinhança de $x_0$ pode escrever-se a fórmula de Taylor de ordem $n-1$

$$f(x) - (f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad c \in ]x_0, x[.$$

*i*) Seja $n$ é par

Se $f^{(n)}(x_0) > 0$ o gráfico de $f$ está acima da tangente.

Se $f^{(n)}(x_0) < 0$ o gráfico de $f$ está abaixo da tangente.

*ii*) Seja $n$ é impar, o gráfico de $f$ está abaixo do gráfico da tangente ou acima consoante $x > x_0$ ou $x < x_0$ designando-se $x_0$ um ponto de inflexão.

■

**Observação 3.11.57.** *Seja $f'(x_0) = 0$*

• *Se $n$ é par tem-se que $x_0$ é ponto de minimo se $f^{(n)}(x_0) > 0$ e $x_0$ é ponto de máximo se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

• *Se $n$ é impar, $x_0$ é ponto de inflexão com tangente horizontal.*

## 3.12 Assíntotas ao gráfico de uma função

Associado ao conceito de limite envolvendo $+\infty$ ou $-\infty$ surge o conceito de assíntota de curvas, que de uma forma pouco precisa designa uma recta arbitrariamente próxima da curva.

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Existem três tipos possíveis de assíntotas ao gráfico de $f$. Assíntotas horizontais. Assíntotas verticais. Assíntotas oblíquas.

i) Uma recta definida por $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ é uma assíntota horizontal à curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - b) = 0$$

ii) Uma recta definida por $x = c$, $c \in \mathbb{R}$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das condições seguintes se verifica

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

iii) Uma recta definida por $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ é uma assíntota oblíqua à curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$$

Analise-se de seguida com mais pormenor as assíntotas oblíquas

**Proposição 3.12.58.** *Para que o gráfico da função $f$ tenha como assíntota quando $x \to +\infty(-\infty)$ a recta $y = ax + b$ é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites*

*i)* $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = a$

*ii)* $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - ax) = b$

**Demonstração.** Se a função $f$ tem uma assíntota obliqua, $y = ax + b$, quando $x \to +\infty(-\infty)$ tem-se $f(x) = ax + b + \varphi(x)$, em que

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \varphi(x) = 0$$

Assim por um lado

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = a$$

e por outro lado

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} (b + \varphi(x)) = b$$

Reciprocamente, se existem e são finitos os limites indicados definindo a função $\varphi(x) = f(x) - ax - b$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \varphi(x) = 0$$

e a recta de equação $y = ax + b$ é assíntota obliqua à curva $y = f(x)$. ■

**Exemplo 3.12.59.** *Seja* $f : ]-\infty, 0[\cup]1. + \infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} & se \quad x > 1 \\[2ex] \dfrac{3x^2+4x+1}{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

*Verifique se existem assíntotas à curva* $y = f(x)$

Para $x > 1$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

e $y = 2$ é uma assíntota horizontal à curva $y = f(x)$ quando $x \to +\infty$.
Tem-se igualmente

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{2x-1}{x-1} = +\infty$$

assim $x = 1$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$
Para $x < 0$ tem-se

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x-4) = 0$$

e a recta $y = 3x + 4$ é uma assíntota oblíqua à curva $y = f(x)$ quando $x \to +\infty$.
Finalmente tem-se

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

concluindo-se que $x = 0$ é uma assíntota vertical à curva $y = f(x)$.

Sejam $P, Q$ funções polinomiais que não têm zeros comuns e $f$ a função definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus A$$

sendo $A$ o conjunto dos zeros reais da função polinomial $Q$.

- Se o grau de $P$ é igual ao grau de $Q$ tem-se

$$f(x) = b + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad b \in \mathbb{R}$$

em que $R$ é uma função polinomial de grau menor que $Q$.
Uma vez que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{R(x)}{Q(x)} = 0$$

tem-se que $y = b$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$.

- Se o grau de $P$ é maior que o de $Q$ uma unidade tem-se

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

em que $R$ é uma função polinomial de grau menor que $Q$.
Uma vez que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}=0$$

tem-se que $y=ax+b$ é uma assíntota oblíqua da curva $y=f(x)$.

- Seja $c\in A$ ou seja $Q(c)=0$.

Facilmente se verifica que quando $x\to c^{\pm}$ tem-se $f(x)\to\pm\infty$ (dependendo dos sinais dos coeficientes principais das funções polinomiais $P$ e $Q$) concluindo-se que a recta $x=c$ é uma assíntota vertical à curva $y=f(x)$.

## 3.13 Exercícios

### 3.13.1 Exercícios resolvidos

**Exerc 3.13.1.** *Seja $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\operatorname{sen}(\sqrt{x}) & se \quad x\in]0,+\infty[ \\ \\ 0 \quad se \quad x=0 \end{cases}$$

*i) A função $f$ é contínua no seu domínio? Justifique.*

*ii) Considere $x_n=\dfrac{1+2n}{n+1}$. Determine o limite da sucessão $f(x_n)$.*

*iii) A função tem máximo e mínimo em $[2,3]$. Justifique.*

**Resolução.**

i) A função $f$ é contínua em $x=0$, uma vez que

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-\operatorname{sen}(\sqrt{x})\right)=0=f(0)$$

A função $f$ é igualmente contínua para $x\neq 0$ uma vez que resulta da composição e adição de funções contínuas.

ii) A sucessão $x_n\in\mathbb{R}^+$ e

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2n}{n+1}=2$$

Sendo a função $f$ contínua em $x=2$ tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(2)$$

iii) Uma vez que $[2,3] \subset \mathbb{R}^+$ e a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, também é contínua em $[2,3]$. Sendo o intervalo $[2,3]$ limitado e fechado, são satisfeitas as condições do teorema de Weierstrass o que permite concluir que a função tem nesse intervalo máximo e minimo.

■

**Exerc 3.13.2.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1+e^x) & se \quad x \in ]-\infty, 1] \\ \sqrt[3]{x^2-1} & se \quad x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

*i) A função $f$ é contínua em $x = 1$? Justifique.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

**Resolução.**

i) A função $f$ não é contínua em $x = 1$, uma vez que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[3]{x^2-1} = 0 \neq f(1) = \ln(1+e)$$

ii) Não sendo a função $f$ contínua em $x = 1$ também não é diferenciável nesse ponto.
Para $x < 1$ e para $x > 1$, a função $f$ é diferenciável pois resulta do produto e da composição de funções diferenciáveis.

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(1+e^x) + \dfrac{xe^x}{1+e^x} & \text{se} \quad x \in ]-\infty, 1[ \\ \dfrac{2x}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} & \text{se} \quad x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

■

**Exerc 3.13.3.** *Considere a função $f : [-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3)+1 & se \quad x > 1 \\ \cos(\operatorname{arcsen} x) & se \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*i) A função $f$ é diferenciável em $x = 1$?*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) A função $f$ é monótona no intervalo $[1, +\infty[$? A função $f$ tem extremos no domínio? Justifique.*

**Resolução.** Simplificando a função $f$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3)+1 & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i) A função $f$ não é diferenciável em $x = 1$, uma vez que não é contínua em $x = 1$.

$$f(1) \neq \lim_{x \to 1_+} \ln(x+3)+1 = \ln(4)+1$$

ii) A função derivada de $f$ define-se

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se} \quad x > 1 \\ \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

iii) A função é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$, pois $f'(x) > 0$. A função tem um máximo local em $x = 0$, uma vez que $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x \in ]-1, 0[$ e $f'(x) > 0$ para $x \in ]0, 1[$. Seja $g$ a restrição da função $f$ ao intervalo $[-1, 1]$, $g$ é uma função contínua no seu domínio e como $[-1, 1]$ é um intervalo fechado e limitado a função $g$ tem máximo e mínimo em $[-1, 1]$.

■

**Exerc 3.13.4.** *Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2-1) & \textit{se} \quad x \geq 0 \\ \\ 2x\left(\ln(-x)+1\right)-1 & \textit{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

*i) A função $f$ é diferenciável em $x = 0$? Defina a função derivada de $f$.*

*ii) A função é monótona em $\mathbb{R}^+$? Justifique.*

*iii) Determine os possíveis extremos locais da função $f$ para $x < 0$.*

**Resolução.**

i) Recorrendo à regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^-} 2x\ln(-x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\ln(-x)}{1/x} = 0.$$

De facto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2/x}{-x^2} = -\lim_{x\to 0^-} 2x = 0.$$

Assim

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x\,(\ln(-x)+1)-1 = -1 \neq f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4.$$

Conclui-se que a função $f$ não é contínua em $x = 0$ consequentemente também não é diferenciável em $x = 0$.
A função derivada de $f$ define-se

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ 2\ln(-x)+4 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

ii) Como $f'(x) > 0$ a função $f$ é monótona em $\mathbb{R}^+$.

iii) Para $x < 0$ os pontos de estacionaridade são as raízes de $f'(x) = 0$ ou seja as raízes de $2\ln(-x) + 4 = 0$. $f(-e^{-2})$ é o único ponto de estacionaridade em $\mathbb{R}^-$. Sendo $f''(x) = 2/x$ para $x < 0$, $f''(-e^{-2}) < 0$ e tem-se que $f(-e^{-2})$ é um máximo local em $\mathbb{R}^-$.

■

**Exerc 3.13.5.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & se \quad x < 0 \\ \\ 3x^4 - 4x^3 + \dfrac{1}{2} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

*i) Defina a função derivada de $f$.*

*ii) A função tem extremos para $x > 0$? Justifique.*

*iii) A equação $f(x) = 0$ tem solução em $[0, 1]$? Justifique.*

*iv) Analise a existência do limite*

$$\lim_{x\to 0} x f(\cos x)\,.$$

**Resolução.**

i) Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ são reais diferentes $f$ não é contínua em $x = 0$ consequentemente $f$ não é diferenciável em $x = 0$.
A função derivada define-se

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ 12x^3 - 12x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \tag{3.13.1}$$

ii) Para $x > 0$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$. Analisando $f'(x) = 0$ tem-se:

$$12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$x = 1$ é ponto de mínimo pois $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$.

iii) Como $f(0)f(1) < 0$ e $f_1 = f|_{[0,1]}$ é contínua em $[0,1]$, do teorema de Bolzano, conclui-se que existe um zero em $]0,1[$.

iv)

$$\lim_{x\to 0^+} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} x(3\cos^4 x - 4\cos^3 x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{x\to 0^-} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-\cos x)}{1/x}$$

e da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$-\lim_{x\to 0^-} 2x - \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen} x} x\cos x = 0$$

Concluindo-se que

$$\lim_{x\to 0^-} xf(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} xf(\cos x)$$

■

**Exerc 3.13.6.** *Seja* $f : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $]0,1[$ *e tal que para* $n \in \mathbb{N}$

$$f(\frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{n+2})$$

*Supondo que existe* $\lim_{x\to 0} f'(x)$*, determine o valor desse limite.*

**Resolução.** A função $f$ é contínua em $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, e diferenciável em $]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$, $n \in \mathbb{N}$, assim do teorema de Lagrange, existe $c_n \in ]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$ tal que

$$\frac{f(\frac{1}{n+1}) - f(\frac{1}{n+2})}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} = f'(c_n) = 0$$

Construa-se então a sucessão de reais, $c_n$, tal que $\frac{1}{n+2} < c_n < \frac{1}{n+1}$, sucessão que é convergente para 0, pelo teorema das sucessões enquadradas. Como existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ qualquer que seja $u_n \to 0$ existe $\lim f(u_n)$. Como se tem $c_n \to 0$ tal que $\lim f'(c_n) = 0$ então $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. ■

**Exerc 3.13.7.** *Seja* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e tal que* $f'(x) \neq 1$*, qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}^+$*. Mostre que existe quando muito um número real positivo* $x_0$ *tal que* $f(x_0) = x_0$

**Resolução.** Admita-se que existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+$, $x_0 < x_1$, tais que $f(x_0) = x_0$ e $f(x_1) = x_1$. A função $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - x$ tem então zeros $x_0, x_1$. Como a função $h$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ pois resulta da soma de funções diferenciáveis, aplicando o teorema de Rolle à função $h$ no intervalo $[x_0, x_1]$ existe $c \in ]x_0, x_1[$ tal que $h'(c) = 0$ ou seja $f'(c) = 1$ o que é falso pois contraria a hipotese. Assim existe apenas $x_0$ tal que $f(x_0) = x_0$. ■

**Exerc 3.13.8.** *Mostre, através do teorema de Lagrange, que*

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

**Resolução.** A função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \ln t$ é uma função diferenciável. Uma vez que a função é contínua em $[x, x+1]$ e diferenciável em

$]x, x+1[$ aplicando o teorema de Lagrange à função $f$ no intervalo $[x, x+1]$, $x > 0$, existe $c \in ]x, x+1[$ tal que

$$\frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \frac{1}{c}$$

Ora como $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$ conclui-se que

$$\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

■

**Exerc 3.13.9.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função contínua. Sendo $f$ uma função com quatro zeros em $]a, b[$ com derivada de terceira ordem contínua em $]a, b[$, terá a função $f'''$ um zero em $]a, b[$? Justifique.*

**Resolução.** Sendo $f$ uma função com quatro zeros em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, da aplicação do teorema de Rolle a $f$, concluimos que existem três zeros de $f'$ em $]a, b[$, aplicando novamente o teorema de Rolle a $f'$, concluimos que existem dois zeros de $f''$ em $]a, b[$ e finalmente aplicando o teorema de Rolle a $f''$, concluimos que a função $f'''$ tem um zero em $]a, b[$

■

**Exerc 3.13.10.** *Seja $f : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existem $f'$ e $f''$. Sendo $f''(x) < 0$, $x \in ]-1, 1[$ mostre que se existe uma sucessão $x_n \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ tal que $f'(x_n) = \frac{1}{n+1}$ então $f$ tem pelo menos um máximo local.*

**Resolução.** A sucessão $x_n \in ]-1/2, 1/2[$ sendo uma sucessão limitada. Assim pelo teorema de Bolzano-Weierstrass $x_n$ tem uma subsucessão $x_{n_k}$ convergente e $x_{n_k} \to c \in [-1/2, 1/2]$.
Ora como $f'$ é contínua em $[-1/2, 1/2]$ então tem-se $f'(x_{n_k}) \to f'(c)$ em que

$$f'(c) = \lim f'(x_{n_k}) = 0$$

O número real $c$ é um ponto de estacionaridade de $f$ que como $f''(c) < 0$ ($f''(x) < 0$ para $x \in ]-1, 1[$) tem como consequência que $f(c)$ é máximo de $f$.

■

**Exerc 3.13.11.** *Determine se existirem os seguintes limites*

$$i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x} \quad ii)\ \lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{2}{x})^x \quad iii)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{tg} x}.$$

**Resolução.**

i)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x} = \frac{\operatorname{arctg} 0^+}{\ln 0^+} = 0$$

ii)

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{2}{x})^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{2}{x})}$$

determine-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Da regra de Cauchy como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+\frac{2}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+\frac{2}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} = 2$$

e finalmente $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^2$

iii) Da regra de Cauchy, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{tg} x + x^2/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x + x/\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x\cos^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x\ + x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x\cos^2 x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}2\cos x\ + 1} = -1/3$$

conclui-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{tg} x} = -1/3.$$

■

**Exerc 3.13.12.** *Determine em $\mathbb{R}$, se existirem, os seguintes limites:*

$$i)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{\operatorname{sen}(x-3)}, \qquad ii)\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\operatorname{sen} x\right)^{1/x}.$$

**Resolução.**

i) Da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{\cos(x-3)}=1.$$

concluindo-se que

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{\operatorname{sen}(x-3)}=1.$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)^{1/x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)}=\mathrm{e}^0=1$$

uma vez que pela regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x)\right)\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen}x+x\cos x}{x\operatorname{sen}x}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}x+x\cos x}{x\operatorname{sen}x}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}x-x\cos x}{2\cos x-x\operatorname{sen}x}=0.$$

■

**Exerc 3.13.13.** *Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x)=\frac{|x|-2}{|x|+1}$$

*i) Estude a função $f$ considerando nomeadamente a continuidade, diferenciabilidade, monotonia, extremos, concavidades, assíntotas.*

*ii) Esboce o gráfico da função $f$.*

**Resolução.**

i) A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois resulta da composição de funções contínuas. É diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pois resulta da composição de funções diferenciáveis. Em $x=0$ não é diferenciável, uma vez que $f'(0)$ não existe,

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x-2}{x+1}}{x}=-\infty$$

A função $f$ é uma função par ($f(x)=f(-x)$) sendo o gráfico da função $f$ simetrico relativamente ao eixo das ordenadas.
Quando $x>0$

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ , a função $f$ é estritamente crescente em $x > 0$.

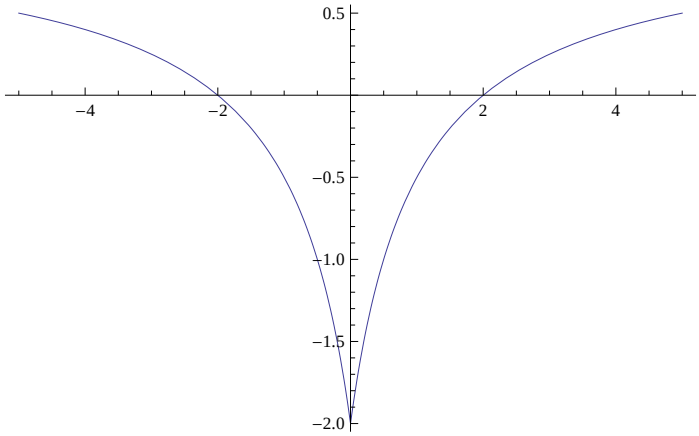
$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

Uma vez que $f''(x) < 0$, a função $f$ é concâva em $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2/x}{1+1/x} = 1$$

Quando $x < 0$ da paridade da função $f$ tem-se que a função $f$ é estritamente decrescente, concâva e também com assintota horizontal quando $x \to -\infty$.
Em $x = 0$ a função tem um mínimo absoluto, uma vez que a função $f$ é contínua, estritamente crescente em $x > 0$ e estritamente decrescente em $x < 0$.

ii) O gráfico da função $f$ é:




■

**Exerc 3.13.14.** *Seja* $f : ]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$. *Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de* $x+1$ *associado a* $f$.

**Resolução.**

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

determine-se os coeficientes
$f(-1) = \ln 2$,

$f'(-1) = -\frac{1}{1-x}|_{x=-1} = -1/2$
$f''(-1) = -\frac{1}{(1-x)^2}|_{x=-1} = -\frac{1}{4}$
Assim

$$P_2(x) = \ln 2 - 1/2(x+1) - \frac{1}{4}\frac{(x+1)^2}{2}$$

■

**Exerc 3.13.15.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no exercício 3.13.4. Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado à função e determine um majorante para o erro cometido ao aproximar a função por esse polinómio no intervalo* $[-11/10, -9/10]$.

**Resolução.** O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ associado à função é o polinómio

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2} = -3 + 4(x+1) - (x+1)^2$$

Quanto ao majorante para o erro, do teorema de Taylor para $c \in [-11/10, -9/10]$ tem-se

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}|$$

vindo uma vez que $|x+1| \leq 1/10$

$$|R_2(x)| = |\frac{2}{c^2}\frac{|(x+1)^3|}{3!}| \leq \frac{1}{3.10^3.c^2} \leq \frac{10^2}{3.10^3.9^2} = \frac{1}{3^5.10}$$

■

**Exerc 3.13.16.** *Seja $f : ]-3, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+3) + 1$. Indique um majorante do erro que se comete ao aproximar a função $f$ em $[1, 3]$ pelo polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x-2$.*

**Resolução.** Do teorema de Taylor, $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ para $x \in [1, 3]$, em que $P_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2$ e
$R_2(x) = f'''(c)(x-2)^3/3!$, $c \in [2, x]$.
Tem-se assim para $c \in [2, x]$

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)(x-2)^3/3!| = |\frac{2(x-2)^3}{6(c+3)^3}| < \frac{|(x-2)|^3}{3^4} < \frac{1}{3^4}$$

■

**Exerc 3.13.17.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(1+e^x)$. Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar a função $f$ no intervalo $]-1, 1[$ pelo polinómio de Taylor de 1º grau em potências de $x$.*

**Resolução.** Do teorema de Taylor tem-se

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c)\frac{x^2}{2!}, \quad c \in [0, x]$$

Assim para $x \in ]-1, 1[$,
$|f(x) - P_1(x)| = |R_1(x)| =$

$$= \left|\frac{2e^{2c} + (2+c)e^c}{(1+e^c)^2}\right| \frac{x^2}{2} < \frac{2e^{2c} + (2+c)e^c}{2(1+e^c)^2} < \frac{2e^{2c} + (2+c)e^c}{2} < \frac{2e^2 + 3e}{2}$$

■

**Exerc 3.13.18.** *Considere a função* $f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x\,(\ln(-x) + 1) - 1$$

*Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de* $x + 1$ *associado à função* $f$ *e determine um majorante para o erro cometido ao aproximar a função por esse polinómio no intervalo* $[-11/10, -9/10]$.

**Resolução.** O polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x + 1$ associado à função é o polinómio

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + f''(-1)\frac{(x+1)^2}{2} = -3 + 4(x+1) - (x+1)^2$$

uma vez que

$$f'(x) = 2\ln(-x) + 4, \qquad f''(x) = 2/x$$

Quanto ao majorante para o erro, do teorema de Taylor, para $c \in [-11/10, -9/10]$ tem-se

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = |f'''(c)\frac{(x+1)^3}{3!}|$$

vindo uma vez que $|x + 1| \leq 1/10$

$$|R_2(x)| = |\frac{2}{c^2}\frac{|(x+1)^3|}{3!}| \leq \frac{1}{3.10^3.c^2} \leq \frac{10^2}{3.10^3.9^2} = \frac{1}{3^5.10}$$

■

**Exerc 3.13.19.** *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *com segunda derivada contínua em* $]a, b[$ *e* $x_0 \in ]a, b[$. *Mostre que*

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

**Resolução.** Considere-se a fórmula de Taylor de 1ª ordem da função $f$ em $x = x_0 + h$, com resto de Lagrange

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(c)h^2}{2!}$$

e em $x = x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(d)h^2}{2!}$$

Somando ambas as equações tem-se

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = \frac{f''(d) + f''(c)}{2}$$

Sendo a função $f''$ contínua em $[a, b]$, de $c \in ]x_0, x_0 + h[$ e de $d \in ]x_0 - h, x_0[$ tem-se quando $h \to 0$ respectivamente $f''(c) \to f''(x_0)$ e $f''(c) \to f''(x_0)$ concluindo-se

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

■

### 3.13.2 Enunciados de exercícios

**Exerc 3.13.20.** *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) & se \quad x \in ]0, +\infty[ \\ \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & se \quad x \in ]-\infty, 0] \end{cases}$$

*i) A função $f$ é contínua em $x = 0$? Justifique.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar a função $f$ no intervalo $[1, 3]$ pelo polinómio de Taylor de 1º grau em potências de $x-2$.*

**Exerc 3.13.21.** *Sendo $f : ]-\frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arcsen}(-2x) & se \quad x \in ]0, \frac{1}{2}[ \\ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} x e^{\frac{\pi}{2}x} & se \quad x \in ]-\frac{2}{\pi}, 0[ \end{cases}$$

*i) A função $f$ é contínua em $x = 0$? Justifique.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) Determine a derivada da função inversa $g = f^{-1}$ em $f(\frac{1}{4})$.*

**Exerc 3.13.22.** *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x(2 + \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) & se \quad x \in ]0, +\infty[ \\ 0 \quad se \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x} \quad se \quad x \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

*i) A função $f$ é contínua em $x = 0$? Justifique.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii)Determine a derivada da função inversa $g = f^{-1}$ em $f(-2)$.*

**Exerc 3.13.23.** *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(2x) & se \quad x \neq 0 \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

*i) Estude a função $f$ do ponto de vista da continuidade. Analise a existência de derivada em $x = 0$*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função $f$.*

**Exerc 3.13.24.** *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(\frac{1}{x^2}) & se \quad x \neq 0 \\ 0 \quad se \quad x = 0 \end{cases}$$

*i) Estude a função $f$ do ponto de vista da continuidade. Analise a existência de derivada em $x = 0$.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 1$ associado à função $f$.*

**Exerc 3.13.25.** *Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1+\frac{1}{x}) & se \quad |x| > 1 \\ \\ 0 \quad se \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

*i) Estude a função $f$ do ponto de vista da continuidade.*

*ii) Defina a função derivada de $f$.*

*iii) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x - 2$ associado à função $f$.*

**Exerc 3.13.26.** *Determine se existirem os seguintes limites*

*i)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\ln(x)}$ *ii)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ *iii)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg} x}$

*iv)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *v)* $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$ *vi)* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\, \dfrac{\sqrt{2x}+1}{1+2\sqrt{2x^2+1}}$

**Exerc 3.13.27.** *Determine se existirem os seguintes limites*

*i)* $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$ *ii)* $\lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{x})^{\frac{2}{x}}$ *iii)* $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

*iv)* $\lim_{x\to 0^+} (x)^{2x}$ *v)* $\lim_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$ *vi)* $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^x$

**Exerc 3.13.28.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto que contém $0$ e $1$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $I$ e tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$*

$$f(\frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n^2}$$

*Determine $f(0)$ e mostre que $[2,3] \subset f(I)$.*

**Exerc 3.13.29.** *Mostre que a equação*

$$3x^2 - \mathrm{e}^x = 0.$$

*tem exactamente três soluções em $\mathbb{R}$.*

**Exerc 3.13.30.** *A equação polinomial em $\mathbb{R}$*

$$x^3 + px + q = 0.$$

*em que $p, q \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ tem mais que uma solução em $\mathbb{R}$? Justifique.*

**Exerc 3.13.31.** *Mostre, através do teorema de Lagrange, que para $x \in [0, +\infty[$*

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{arctg} x$$

**Exerc 3.13.32.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ com derivada $f'$ que é uma função contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ com derivada não nula. Mostre que existem $\xi_1, \xi_2 \in ]a,b[$ e $c \in ]\xi_1, \xi_2[$ tais que*

$$f''(c)[f(\xi_2) - f(\xi_1)] = f'(c)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]$$

# Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.