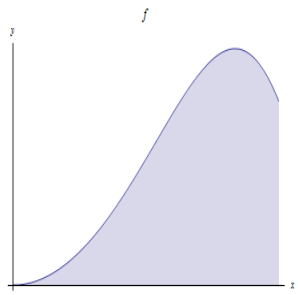
Capítulo 4

Integral de Riemann

Os principais resultados da teoria do integral de Riemann para funções limitadas definidas em $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ são apresentados neste capítulo.
Definem-se, no sentido de Riemann, o integral definido e funções integráveis. Indicam-se exemplos da determinação do integral recorrendo à definição. Estabelecem-se critérios de integrabilidade. Conclui-se que as funções limitadas que sejam monótonas e as funções limitadas que sejam contínuas são integráveis. Indicam-se as principais propriedades do integral definido.
Demonstra-se o teorema fundamental do cálculo integral. Define-se integral indefinido e estabelece-se a fórmula de Barrow. Indicam-se métodos gerais de integração: Integração por partes, Integração por substituição. Analisa-se a integração de funções racionais. Indica-se procedimentos para a integração de funções irracionais e de funções trigonométricas.

4.1 Definição do integral de Riemann

Considere-se o problema de determinar a área sombreada da figura



A

em que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e

$$A = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

O problema formulado suscita 3 questões que se associam aos três tópicos centrais da teoria do integral de Riemann

• O que se entende por área da região limitada A ?
Como se define o integral de Riemann?

• Qual a classe de funções para as quais a definição de integral faz sentido? Como caracterizar as funções integráveis?

• Como determinar a área?
O que estabelece o teorema fundamental do cálculo integral? Quais os métodos de integração?

Nesta secção vai-se abordar a primeira questão formulada: Como se define o integral de Riemann. Tendo por objectivo a determinação da área da região A uma ideia natural é recorrer a aproximações por excesso e por defeito, recorrendo a áreas de rectângulos e melhorando essas aproximações, aumentando o número de rectângulos. Num certo sentido é esta a ideia que está na base da definição do integral de Riemann.

Definição 4.1.1. *Seja $I = [a, b]$. Chama-se decomposição do intervalo I a um conjunto finito de pontos interiores de I*

$$d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$$

em que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definição 4.1.2 (Somas de Darboux)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e d uma decomposição de $I = [a, b]$. Designa-se por:*
• *soma inferior de Darboux de f relativa à decomposição d*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k.(x_k - x_{k-1}) = s_d = s(f, d)$$

em que

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

• *soma superior de Darboux de f relativa à decomposição d*

$$\sum_{k=1}^{n} M_k.(x_k - x_{k-1}) = S_d = S(f, d)$$

em que

$$M_k = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{k-1},\, x_k]\}\,, \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Proposição 4.1.3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e S_d, s_d as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d, então*

$$s_d \leq S_d$$

Demonstração. Evidente, pois $m_k \leq M_k$ ■

Definição 4.1.4. *Sendo d, d' duas decomposições de I diz-se que d' é uma decomposição mais fina que a decomposição d se*

$$d \subset d'$$

Cada decomposição $d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ com $n - 1$ pontos decompõe o intervalo I em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Em particular se $n = 1$ o subintervalo único coincide com I e as somas superiores e inferiores são

$$M(b - a) \qquad \text{e} \qquad m(b - a)$$

em que M e m são, respectivamente o supremo e o infimo da função em I.

Proposição 4.1.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, S_d, s_d as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d, e $S_{d'}$, $s_{d'}$, as somas superior e inferior de Darboux relativas à decomposição d' mais fina que d. Então*

$$s_d \leq s_{d'} \leq S_{d'} \leq S_d$$

Demonstração. Faz-se a demonstração quando d' tem mais um ponto que d já que no caso geral se pode sempre supor que a passagem de d para d' é realizada por etapas sucessivas.
Seja $x_1' \in d' \setminus d$ tal que $x_1' \in]x_0, x_1[$. Sendo M_1' e M_1'', respectivamente, os supremos de f em $[x_0, x_1']$ e $[x_1',\, x_1]$ e M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, os supremos de f em $[x_{i-1}, x_i]$

$$M_1' \leq M_1 \quad \text{e} \quad M_1'' \leq M_1$$

Vindo

$$M_1'(x_1' - x_0) + M_1''(x_1 - x_1') \leq M_1(x_1' - x_0) + M_1(x_1 - x_1') = M_1(x_1 - x_0)$$

e

$$M_1'(x_1' - x_0) + M_1''(x_1 - x_1') + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) \leq$$

$$\leq M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Concluindo-se que

$$S_{d'} \leq S_d \ .$$

De forma análoga se demonstraria que $s_d \leq s_{d'}$ o que atendendo a que $s_{d'} \leq S_{d'}$ termina a demonstração ■

Proposição 4.1.6. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, d' e d'' duas decomposições quaisquer de I, $S_{d'}$ a soma superior relativa a d' e $s_{d''}$ a soma inferior relativa a d''. Então*

$$s_{d''} \leq S_{d'}$$

Demonstração. Seja $d = d' \cup d''$ a decomposição sobreposta a d' e d''. Como a decomposição sobreposta a duas decomposições arbitrárias d' e d'' é sempre mais fina que qualquer delas

$$s_{d''} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d'}$$

■

Sendo f uma função limitada em $I = [a, b]$ e $\mathcal{D}(I)$ o conjunto de todas as decomposições de I, designe-se por

$$\Sigma = \{S(f, d)\}_{d \in \mathcal{D}(I)}$$

o conjunto formado pelas somas superiores de f relativas a todas as decomposições de I e por

$$\sigma = \{s(f, d)\}_{d \in \mathcal{D}(I)}$$

o conjunto formado pelas somas inferiores de f relativas a todas as decomposições de I.

A proposição 4.1.5 permite concluir que Σ tem um elemento máximo e σ um elemento minimo os quais são respectivamente as somas superior e inferior $M(b - a)$ e $m(b - a)$ relativas à decomposição vazia. Por outro lado a proposição 4.1.6 mostra que qualquer elemento de σ é menor ou igual a qualquer elemento de Σ. Assim Σ e σ são conjuntos limitados com infimo e supremo em $\mathbb{R}$ (note-se que a decomposição de I tem um número finito de elementos mas que o conjunto de todas as decomposições é infinito).

Definição 4.1.7. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Designa-se por:*

- *Integral superior de Darboux de f em $I = [a, b]$*

$$S = I_s(f) = \inf\{S_d : \ d \in \mathcal{D}(I)\} = \overline{\int_I} f = \overline{\int_a^b} f$$

infimo do conjunto das somas superiores de f relativas a todas as decomposições de I.

- *Integral inferior de Darboux de f em $I = [a, b]$*

$$s = I_i(f) = \sup\{s_d : \ d \in \mathcal{D}(I)\} = \underline{\int_I} f = \underline{\int_a^b} f$$

supremo do conjunto das somas inferiores de f relativas a todas as decomposições de I.

Se $I_i(f) = I_s(f)$ a função diz-se integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$ e designa-se por integral definido de f em $[a, b]$ ao valor comum destes dois integrais

$$\int_a^b f = I_i(f) = I_s(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 4.1.8. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = C =$constante. Analise-se se f é integrável em $[a, b]$*

Qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$ tem-se $M_k = m_k = C$. Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} \quad m_k.(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n} \quad (x_k - x_{k-1}) = C(b - a)$$

e analogamente

$$S_d = C(b - a).$$

Concluindo-se que Σ e σ são conjuntos singulares com um único elemento $C(b - a)$. Tem-se pois que f é integrável em $[a, b]$ e

$$\overline{\int_a^b} C\, dx = \underline{\int_a^b} C\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = C(b - a)$$

Exemplo 4.1.9. *Seja a função de Dirichlet $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Verifique que D não é integrável em $[a, b]$.

Qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$ e qualquer que seja o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ tem-se $M_k = 1$ e $m_k = 0$. Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} \quad m_k.(x_k - x_{k-1}) = 0 \Rightarrow \sigma = \{0\}$$

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} \quad M_k.(x_k - x_{k-1}) = b - a \Rightarrow \Sigma = \{b - a\}$$

Concluindo-se que a função f não é integrável pois

$$b - a = \overline{\int_a^b} D(x)\, dx \neq \underline{\int_a^b} D(x)\, dx = 0$$

4.2 Critérios de integrabilidade

Teorema 4.2.1 (Critério de integrabilidade de Riemann)**.** *Uma condição necessária e suficiente para que a função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja integrável em $[a, b]$ é que*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{d\in\mathcal{D}(I)}{\exists} \quad S_d - s_d < \epsilon$$

Demonstração.
Comece-se por demonstrar que a condição é suficiente.
Admita-se que f não é integrável i.e.

$$S > s$$

e seja $0 < \epsilon \leq S - s$. Então para qualquer decomposição $d \in \mathcal{D}(I)$ tem-se

$$\epsilon \leq S - s \leq S_d - s_d$$

pois $S_d \geq S$ e $s_d \leq s$ já que S é o infimo de Σ e s é o supremo de σ.

Demonstre-se que a condição é necessária.
Seja f integrável i.e. $S = s$.
Por definição de supremo e infimo qualquer que seja $\epsilon > 0$ existem necessariamente decomposições d' e d'' tais que

$$S_{d'} < S + \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad s_{d''} > s - \epsilon/2$$

Assim designando por d a decomposição sobreposta a d' e d'' $(d = d' \cup d'')$ tem-se

$$S_d < S + \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad s_d > s - \epsilon/2$$

e portanto, sendo f integrável, conclui-se que

$$S_d - s_d < S + \epsilon/2 - s + \epsilon/2 = \epsilon$$

■

Corolário 4.2.2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se existir uma sucessão de decomposições d_n de I tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{d_n} - s_{d_n}) = 0 \tag{4.2.1}$$

então f é uma função integrável e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_{d_n} = \lim_{n\to+\infty} s_{d_n}$$

Demonstração. Da condição (4.2.1) qualquer que seja $\epsilon > 0$ existe N tal que para $n > N$

$$S_{d_n} - s_{d_n} < \epsilon$$

Assim do teorema 4.2.1 conclui-se que f é integrável. Além disso S_{d_n} é uma sucessão decrescente e minorada consequentemente com limite. ■

Corolário 4.2.3. *Para que a função f seja integrável em $I = [a, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = k$$

é condição necessária e suficiente que para qualquer $\epsilon > 0$ exista uma decomposição d de I tal que $S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$.

Demonstração. (*)

Demonstre-se a condição necessária.

Sendo $\int_a^b f(x)\,dx = k$ qualquer que seja a decomposição d que verifique $S_d - s_d < \epsilon$, tal decomposição existe de acordo com o teorema anterior, ter-se-á

$$k \geq s_d > S_d - \epsilon \geq k - \epsilon \quad \text{e} \quad k \leq S_d < s_d + \epsilon \leq k + \epsilon$$

Concluindo-se assim que

$$S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$$

Demonstre-se agora a condição suficiente.

Se para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma decomposição d tal que $S_d, s_d \in V_\epsilon(k)$, tem-se

$$S_d < k + \epsilon \qquad \text{e} \qquad s_d > k - \epsilon$$

concluindo-se que para qualquer $\epsilon > 0$ existe d tal que $S_d - s_d < 2\epsilon$ e que f é integrável.
Por outro lado se o integral tiver um valor diferente de k, por exemplo, se $S = s > k$ nenhuma soma superior pertenceria a $V_\epsilon(k)$ desde que $\epsilon \leq S - k$ visto que todas as somas superiores são maiores ou iguais a S concluindo-se assim que o valor do integral é k (se $S = s < k$ o raciocínio é analogo).
■

Exemplo 4.2.4. *Sendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, analise-se se a função é integrável em $[0,1]$ e em caso afirmativo determine-se $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

Considere-se a sucessão

$$d_1 = \emptyset, d_2 = \{\frac{1}{2}\}, d_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}, \qquad \ldots, \qquad d_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$$

Tem-se $[x_{k-1}, x_k] = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ e como f é crescente neste intervalo tem-se

$$m_k = \frac{k-1}{n} \quad \text{e} \quad M_k = \frac{k}{n}$$

Assim

$$s_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}.(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}$$

e

$$S_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

concluindo-se que f é integrável pois

$$S_{d_n} - s_{d_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Quanto ao integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.\frac{1/n+1}{2}.n = \frac{1}{2}$$

4.3 Integrabilidade de funções monótonas e contínuas

Teorema 4.3.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona e limitada. Então f é uma função integrável em $[a,b]$.*

Demonstração.

Se $f(a) = f(b)$ a função f é constante em $[a, b]$ e é evidentemente integrável. Considere-se $f(a) < f(b)$ e consequentemente a função f crescente (se fosse decrescente a demonstração seria análoga).

Seja $d_n = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}\}$ uma decomposição que subdivide $[a, b]$ em n subintervalos iguais

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

Sendo f crescente

$$m_k = f(x_{k-1}) \quad \text{e} \quad M_k = f(x_k)$$

e portanto

$$S_{d_n} - s_{d_n} = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$

Tem-se assim

$$\lim_{n \to +\infty} (S_{d_n} - s_{d_n}) = 0$$

concluindo-se que f é integrável.

■

Observação 4.3.2. *O teorema anterior é generalizável a funções seccionamente monótonas e limitadas.*

Exemplo 4.3.3. *Analise-se se é integrável a função* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ \frac{1}{k} & se \quad x \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$ [1]

Considere-se a partição $P_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n})$. Tem-se

$$S(f, P_n) = \frac{M_0}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

[1] função monótona com um número infinito de pontos de descontinuidade

e

$$s(f, P_n) = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{d_n} - s_{d_n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Conclui-se pois que f é integrável apesar de ter uma infinidade de descontinuidades.

Teorema 4.3.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e contínua em $I = [a, b]$. Então f é uma função integrável em I.*

Demonstração. (*) A função f é uniformemente contínua [2] em $I = [a, b]$ (toda a função contínua num intervalo limitado e fechado é uniformemente contínua nesse intervalo). Assim dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|x - y| < \delta$ se tem $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b - a)$ para $x, y \in I$.
Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b - a)/n < \delta$ e $d_n = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}\}$ uma decomposição que subdivide $[a, b]$ em n subintervalos iguais

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n} < \delta \qquad .$$

Pelo teorema de Weierstrass existem $v_k, w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tais que $m_k = f(v_k)$ e $M_k = f(w_k)$ por conseguinte

$$M_k - m_k = f(v_k) - f(w_{k-1}) < \epsilon/(b - a)$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon$$

concluindo-se que f é integrável.

■

Observação 4.3.5. *O teorema 4.3.4 generaliza-se para funções limitadas com um conjunto de pontos de descontinuidade contável.*

[2] Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua em $I = [a, b]$ se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x,t\in I}{\forall} \ |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Analise-se de seguida as principais propriedades do integral definido

Teorema 4.3.6. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $I = [a, b]$ e c uma constante real. Então*

i) $f + g$ é uma função integrável e

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

ii) $c.f$ é uma função integrável e

$$\int_I (c.f) = c. \int_I f \, .$$

Demonstração. (*) Sendo

$$\int_I f = \alpha \quad \text{e} \quad \int_I g = \beta$$

qualquer que seja $\epsilon > 0$ existem decomposições d_1, d_2 tais que

$$S'_{d_1},\, s'_{d_1} \in V_{\epsilon/2}(\alpha), \qquad\qquad S'_{d_2},\, s'_{d_2} \in V_{\epsilon/2}(\beta)$$

Tem-se então

$$S'_d,\, s'_d \in V_{\epsilon/2}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \epsilon/2 < s'_d \leq \alpha \leq S'_d < \alpha + \epsilon/2$$

$$S''_d,\, s''_d \in V_{\epsilon/2}(\beta) \Leftrightarrow \beta - \epsilon/2 < s''_d \leq \beta \leq S''_d < \beta + \epsilon/2$$

Assim

$$s'_d + s''_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad S'_d + S''_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta).$$

Considerando a decomposição sobreposta $d = d_1 \cup d_2$ designe-se por M'_k, M''_k, M_k, m'_k, m''_k, m_k os supremos e infimos das funções f, g e $f + g$ em $[x_{k-1}, x_k]$ e conclua-se que $s_d, S_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta)$.
Tem-se

$$m_k \geq m'_k + m''_k \qquad\qquad M_k \leq M'_k + M''_K$$

Assim

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} \; m_k.(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} \; m'_k.(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \; m''_k.(x_k - x_{k-1})$$

e

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} \; M_k.(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \; M'_k.(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \; M''_k.(x_k - x_{k-1})$$

tendo-se finalmente

$$s'_d + s''_d \leq s_d \leq S_d \leq S'_d + S''_d \quad .$$

Assim

$$s_d, S_d \in V_\epsilon(\alpha + \beta)$$

o que permite do corolário 4.2.3 obter a proposição i).
Análogamente se demonstra a proposição ii). ■

Observação 4.3.7.

- $\displaystyle\int_a^a f = 0$
- *Se* $b < a$ *tem-se* $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f.$

Teorema 4.3.8. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$.

i) Se f *é integrável em* $I = [a, b]$ *é também integrável em qualquer intervalo não degenerado* $J \subset I$ *e para qualquer* $c \in]a, b[$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

ii) Se f *é uma função integrável em* $[a, c]$ *e em* $[c, b]$ *então* f *é uma função integrável em* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f\,.$$

Demonstração. (*)

i) Sendo f uma função integrável em $I = [a, b]$ e $c \in]a, b[$, demonstre-se que f é integrável em $J = [a, c]$.
Atendendo ao critério de integrabilidade de Riemann, teorema 4.2.1, considere-se $\epsilon > 0$ e determine-se uma decomposição $d_1 \in \mathcal{D}(I)$ tal que $S_{d_1} - s_{d_1} < \epsilon$. Sendo $d_2 = d_1 \cup \{c\}$ uma decomposição mais fina que a decomposição d_1 tem-se também $S_{d_2} - s_{d_2} < \epsilon$. Considere-se então a decomposição do intervalo J, $d = d_2 \cap]a, c[$, e mostre-se que

$$S_d - s_d \leq S_{d_2} - s_{d_2} \tag{4.3.1}$$

em que S_d, s_d são as somas superior e inferior relativas a d.
Sendo $d = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ e $d_2 = \{x_1, \ldots x_m, \ldots, x_{n-1}\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$ tem-se

$$S_{d_2} - s_{d_2} = S_d - s_d + \sum_{k=m+1}^{n} (M_k - m_k).(x_k - x_{k-1})$$

Uma vez que as parcelas do somatório da igualdade anterior são não negativas, tem-se (4.3.1), concluindo-se que $S_d - s_d < \epsilon$, e do teorema 4.2.1, a integrabilidade da função f em $J = [a, c]$.
Analogamente se prova a integrabilidade da função f em $J = [c, b]$ e consequentemente em qualquer intervalo $J = [c, d]$, com $a < c < d < b$.

ii) Sendo $\alpha = \int_a^c f$ e $\beta = \int_c^b f$, do critério de integrabilidade de Riemann, teorema 4.2.1, existem decomposições $d_1 \in \mathcal{D}([a, c])$ e $d_2 \in \mathcal{D}([c, b])$ tais que

$$\alpha - \epsilon/2 < s_{d_1} \leq \alpha \leq S_{d_1} < \alpha + \epsilon/2$$

e

$$\beta - \epsilon/2 < s_{d_2} \leq \beta \leq S_{d_2} < \beta + \epsilon/2$$

Designando por d a decomposição de $[a, b]$, definida por $d = d_1 \cup \{c\} \cup d_2$ tem-se

$$\alpha + \beta - \epsilon < s_d \leq \alpha + \beta \leq S_d < \alpha + \beta + \epsilon$$

concluindo-se que f é integrável em $[a, b]$ e que $\alpha + \beta = \int_a^b f$.

■

Como consequências do teorema anterior tem-se

Observação 4.3.9. • *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $I = [a, b]$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a, b]$ então*

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f .$$

• *Se f é integrável em $[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, ..., $[c_n, b]$ então f é integrável em $[a, b]$ tendo-se*

$$\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f = \int_a^b f .$$

Teorema 4.3.10. *Sejam f, g funções integráveis em $I = [a, b]$*

i) Se $f(x) \geq 0, \ x \in I$ então

$$\int_a^b f \geq 0$$

ii) Se $f(x) \geq g(x), \ \ x \in I$ então

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

iii) Se f é integrável então $|f|$ também é integrável e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Demonstração.

i) Sendo $m \geq 0$ o infimo da função em $I = [a, b]$ tem-se $\int_a^b f \ \geq m(b-a) \geq 0$

ii) Se $f(x) \geq g(x), \ \ x \in I$ tem-se $f(x) - g(x) \geq 0$ e então $\int_a^b (f - g) \ \geq 0$

iii) Sendo $\overline{M}_k, \overline{m}_k$ o supremo e infimo de $|f|$ em $[x_{k-1}, x_k]$

$\overline{M}_k - \overline{m}_k = \sup\{||f(x)| - |f(t)||, \ \ x, t \in I_k\} \leq \sup\{|f(x) - f(t)|, \ \ x, t \in I_k\}$

$$\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq M_k - m_k$$

Assim

$$\overline{S}_d - \overline{s}_d \leq S_d - s_d$$

concluindo-se que $|f|$ é integrável.
Por outro lado tem-se

$$-|f| \ \leq f \leq \ |f|$$

vindo

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \ \leq \int_a^b |f|$$

e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

■

Observação 4.3.11. *Quando a função $|f|$ é integrável não se pode concluir que f seja integrável. Por exemplo a função*

$$f(x) = \begin{cases} C & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -C & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável mas a função $|f|$ é integrável.

4.4 Teorema fundamental do cálculo integral. Fórmula de Barrow

A diferenciação e a integração são dois dos tópicos mais importantes em Análise. O primeiro é um processo local uma vez que a derivada depende apenas dos valores da função numa vizinhança do ponto, o segundo é um processo global no sentido de que o integral de uma função depende dos seus valores num intervalo. À primeira do vista pareceria não existir qualquer relação entre estes dois tópicos contudo o teorema fundamental do cálculo integral mostra o contrário.

Sendo a função $f : I \to \mathbb{R}$ integrável em $I = [a, b]$ o teorema 4.3.8 permite concluir que existe

$$\int_a^c f(t)\,dt, \qquad\qquad c \in [a, b]$$

Definição 4.4.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Designa-se por integral indefinido de f em $I = [a, b]$ a função $F : I \to \mathbb{R}$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

Teorema 4.4.2. *(1º Teorema Fundamental do Cálculo Integral)*
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $I = [a, b]$. Então

i) A função integral indefinido de f, F, é contínua em I.

ii) Se f é contínua em $c \in]a, b[$, a função integral indefinido de f, F, é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c)$$

Demonstração.

i) Mostre-se que F é contínua em I, i.e. que sendo $c \in [a, b]$

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists} :\ x \in I\,,\ |x - c| < \epsilon \Rightarrow |F(x) - F(c)| < \delta \tag{4.4.1}$$

Tem-se para $x > c$

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt$$

vindo

$$|F(x) - F(c)| = \left|\int_c^x f(t)\,dt\right| \leq \int_c^x |f(t)|\,dt \leq A.\int_c^x 1\,dt = A.|x - c|$$

em que $A = \sup_{x\in I}|f(x)|$. Conclui-se assim que para qualquer $\delta > 0$, escolhendo $\epsilon = \delta/A$ se verifica (4.4.1). Analogamente quando $x < c$ se verificava (4.4.1). A função F é assim contínua em $c \in]a, b[$.

ii) Sendo f é contínua em $c \in]a, b[$

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists} :\ x \in I\,,\ |x-c| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \delta$$

Analise-se a diferencibilidade da função F em c.
Seja $h = |x - c| < \epsilon$ e analise-se

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt - \frac{f(c)}{h}\int_c^{c+h} 1\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,dt.$$

Tem-se

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{|h|}\int_c^{c+h} 1\,dt = \frac{|h|}{|h|}\delta = \delta$$

Assim F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c)$$

■

Definição 4.4.3. *A função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se primitivável em I, se existir $F : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in I \quad ^{3}$$

F diz-se uma primitiva de f e representa-se por $\int f(t)\,dt$[4] ou por $P(f)$.

Proposição 4.4.4. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua em $I = [a, b]$ então a função integral indefinido é uma primitiva de f em I.*

[3]Nos pontos extremos de I a derivada é a derivada à esquerda ou à direita, consoante se trate do extremo mais à direita ou mais à esquerda de I.

[4]Muitas funções elementarmente primitiváveis não têm como primitiva uma função elementar.

Proposição 4.4.5. *Sejam F_1, F_2 duas primitivas da função f em I, então $F_1 - F_2$ é uma função constante em I.*

Demonstração. Sendo F_1, F_2 duas primitivas de f em $I = [a, b]$, $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in I$. Assim tem-se $(F_1 - F_2)(x) = C, \quad x \in I$ ■

Proposição 4.4.6. *Se a função f é primitivável em I, dados $x_1 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ existe uma e uma só primitiva F_0 de f tal que*

$$F_0(x_1) = \alpha$$

Demonstração. Sendo F uma primitiva de f em I qualquer outra primitiva em I será:

$$F_0(x) = F(x) + C$$

Escolhendo $C = \alpha - F(x_1)$ tem-se $F_0(x_1) = \alpha$. É imediato que F_0 é única, pois se existisse outra primitiva $\tilde{F}_0$ satisfazendo a mesma condição ter-se-ia $\tilde{F}_0'(x) - F_0'(x) = 0$, $x \in I$ e $\tilde{F}_0(x_1) - F_0(x_1) = 0$ permitindo o teorema de Lagrange concluir que a diferença $\tilde{F}_0 - F_0$ era identicamente nula em I. ■

Teorema 4.4.7. *(2º Teorema Fundamental do Cálculo Integral)*
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável e primitivável em $I = [a, b]$ e seja F uma primitiva. Então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b \qquad \textit{Fórmula de Barrow} \tag{4.4.2}$$

Demonstração. Seja uma decomposição $d = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ de I e

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \quad (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

O teorema de Lagrange em $[x_{k-1}, x_k]$ permite concluir, sendo $\zeta_k \in]x_{k-1}, x_k[$, que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \quad F'(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \quad f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Ora como

$$m_k \leq f(x_k) \leq M_k$$

tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} \quad m_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{n} \quad M_k(x_k - x_{k-1})$$

e

$$\sup_d s(f,d) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_d S(f,d)$$

Sendo f integrável

$$\sup_d s(f,d) = \inf_d S(f,d)$$

e

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Note-se que no caso particular de f ser contínua

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad\qquad c \in]a,b[$$

é uma primitiva de f e, de imediato

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

■

Exemplo 4.4.8. *Aplicando a fórmula de Barrow aos integrais seguintes, tem-se:*

- $\displaystyle\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$
- $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt = -\left[\cos t\right]_0^\pi = 2$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt = -\left[\cos t\right]_0^{2\pi} = 0$

4.5 Métodos gerais de integração

Teorema 4.5.1 (Integração por partes)**.** *Sejam as funções $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com funções derivadas integráveis em I. Então*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Demonstração.

As funções fg' e $f'g$ são funções integráveis já que o produto de funções integráveis é integrável, por outro lado

$$h = (fg)' = f'g + fg'$$

Assim sendo primitiva de $h = (fg)'$ a função fg

$$\int_a^b h(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Concluindo-se que:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

■

Exemplo 4.5.2. *Determine-se* $\int_1^2 x\ln x\,dx$ *recorrendo ao método de integração por partes*

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= (2\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

Exemplo 4.5.3. *Determine-se* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ *recorrendo ao método de integração por partes*

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x.(-\cos x)'\,dx =$$
$$= \left[-\operatorname{sen}^2 x.\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen} x.\cos x(-\cos x)\,dx =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x.\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

Sendo $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$ tem-se

$$I_3 = 2(I_1 - I_3) \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}I_1$$

ora como $I_1 = 1$ conclui-se que

$$I_3 = \frac{2}{3}$$

Observação 4.5.4. *O método de integração por partes é também um método de primitivação por partes considerando f e g funções diferenciáveis com derivada contínua. De facto*

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$$

Exemplo 4.5.5. *Determine-se uma primitiva da função $f(t) = t\cos t \operatorname{sen} t$.*

$$\begin{aligned}\int_0^x t\cos t \operatorname{sen} t\,dt &= \left[\frac{1}{2}t\operatorname{sen}^2 t\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt = \\ &= \frac{1}{2}x.\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\left(x\operatorname{sen}^2 x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right)\end{aligned}$$

Teorema 4.5.6 (Integração por substituição)**.** *Seja a função f contínua em $[a,b]$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ diferenciável com derivada integrável em $[\alpha,\beta]$, tal que $a = \varphi(\alpha)$ $b = \varphi(\beta)$.*
Então a função $(f \circ \varphi).\varphi'$ é integrável em $[\alpha,\beta]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$$

Demonstração. Seja F uma primitiva de f em $[a,b]$ e para $t \in [\alpha,\beta]$

$$h(t) = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) = f(\varphi(t)).\varphi'(t)$$

Tem-se então, sendo $F \circ \varphi$ uma primitiva de h em $[\alpha,\beta]$,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta h(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

■

Observação 4.5.7. *A função φ do enunciado do teorema 4.5.6 pode não ser bijectiva contudo na primitivação por substituição é necessário que φ seja bijectiva. É primitiva da função contínua f em $x \in [a,b]$, a função*

$$\int_a^x f(u)\,du = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Exemplo 4.5.8. *Determine-se o integral*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

recorrendo ao método de integração por substituição.

Sendo a substituição $\varphi : [0, \pi/2] \to [0, 1]$, $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$, $\varphi'(t) = \cos t$ tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Exemplo 4.5.9. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$$

recorrendo ao método de integração por substituição.

Sendo a substituição $\varphi : [0, 1] \to [1, 2]$, $\varphi(t) = 1 + t^2$, $\varphi'(t) = 2t$ tem-se

$$2\int_0^1 \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2}.t\,dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt = 2\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 4.5.10. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Recorrendo à substituição $\varphi : [1, \sqrt{2}] \to [1, 2]$, $\varphi(t) = t^2$, $\varphi'(t) = 2t$ tem-se

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t} 2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt =$$

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1 - \ln(1+\sqrt{2}) + \ln 2\right)$$

Exemplo 4.5.11. *Determine-se uma primitiva da função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

Recorrendo à substituição $u = t^2 = \varphi(t)$ tem-se

$$\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt$$

$$= \left[2(t - \ln(1+t))\right]_0^{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}))$$

4.6 Integração de funções racionais

Nesta secção analisa-se a determinação de integrais quando a função integranda é uma função racional, função que é elementarmente primitivável. Associada à determinação de integrais de funções racionais inicia-se a secção com uma abordagem sucinta à decomposição de polinómios em polinómios irredutíveis e à decomposição de uma função racional em fracções simples.

A função racional p/q em que p e q são polinómios é representada por uma fracção própria se o grau do polinómio numerador for menor que o grau do polinómio denominador, e representada por uma fracção imprópria caso contrário.

Sendo p um polinómio arbitrário e q um polinómio de grau maior ou igual a um, mostra-se que existem sempre polinómios univocamente determinados r e c tais que

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$

em que o grau $r <$ grau $p \leq$ grau q.

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por q tem-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

o que atendendo a que um polinómio é imediatamente primitivável reduz a primitivação de funções racionais impróprias à primitivação de funções racionais próprias. Nesta secção consider-se-á apenas funções racionais representadas por fracções próprias.

Comece-se por analisar a decomposição de um polinómio de coeficientes reais em factores irredutiveis.

Definição 4.6.1. *Um polinómio q de coeficientes reais e de grau $n \geq 1$ é redutivel se existirem dois polinómios, q_1, q_2, ambos de grau inferior a n tais que*

$$q = q_1.q_2$$

Diz-se irredutivel em caso contrário.

Mostra-se que:

• Nos polinómios de grau impar, os polinómios de grau 1 são irredutíveis. Os polinómios de grau superior a 1 são redutíveis (estes polinómios, q, têm limites infinitos de sinais contrários quando $x \to \pm\infty$ já que existindo $a, b \in \mathbb{R}$

tais que $q(a).q(b) < 0$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $q(c) = 0$).
• Nos polinómios de grau par, os polinómios de grau superior a 2 são redutíveis. Os polinómios de grau 2 podem ser irredutíveis ou redutíveis. Considere-se

$$q(x) = x^2 + bx + c$$

Se $b^2 - 4c \geq 0$ os polinómios são redutíveis ($q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou $q(x) = (x-\alpha)^2$). Se $b^2 - 4c < 0$ os polinómios são irredutíveis ($q(x) = (x + b/2)^2 + (4c - b^2)/4 = (x-p)^2 + q^2$, $p, q \in \mathbb{R}$).

Um polinómio com coeficientes reais factoriza-se em:
• polinómios de grau um (com raízes simples; com raízes simples e múltiplas)
• polinómios de grau dois irredutíveis (com raízes simples; com raízes simples e múltiplas)

Analise-se de seguida a decomposição de uma função racional em fracções simples começando por definir polinómios primos entre si.

Definição 4.6.2. *Dois polinómios q_1 e q_2 são primos entre si se não existirem polinómios, $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ e $\tilde{q}$ tais que*

$$q_1 = \tilde{q}.\tilde{q}_1 \qquad\qquad q_2 = \tilde{q}.\tilde{q}_2$$

Proposição 4.6.3. *Sejam q_1 e q_2 polinómios primos entre si e p um polinómio tal que grau $p <$ grau (q_1, q_2). Então existem polinómios p_1 e p_2 tais que*

$$\frac{p(x)}{q_1(x).q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}, \tag{4.6.1}$$

em que o grau $p_i <$ grau q_i, $i = 1, 2$.

Demonstração. (*) Do teorema de Bezout existem polinómios $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$ primos entre si tais que

$$\tilde{p}_1.q_1 + \tilde{p}_2.q_2 = 1$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $\frac{p}{q_1 q_2}$ tem-se

$$\frac{p}{q_1 q_2} = \frac{p\tilde{p}_1}{q_2} + \frac{p\tilde{p}_2}{q_1}$$

Ora,

$$p\tilde{p}_1 = h_2 q_2 + p_2 \qquad\qquad p\tilde{p}_2 = h_1 q_1 + p_1$$

em que h_i, p_i, $i = 1, 2$ são polinómios e grau $p_i <$ grau q_i.
Assim

$$\frac{p}{q_1 q_2} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1} + h_1 + h_2$$

o que atendendo a que grau $(q, q_1) >$ grau p conduz a (4.6.1) ■

Exemplo 4.6.4. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x}\, dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

em que

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ B - C = 1 \\ -A = 1 \end{cases}$$

De facto usando o princípio da identidade de polinómios

$$4x^2 + x + 1 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A$$

Assim

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

e

$$\int_2^3 f(x)\, dx = [-\ln|x| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1|]_2^3 = -3\ln 3 + 8\ln 2.$$

Proposição 4.6.5. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e p, q_1 polinómios tais que grau $p <$ $n+$grau q_1 e $q_1(a) \neq 0$. Então*

$$\frac{p(x)}{q_1(x)(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

em que grau $p_1 <$grau q_1 e

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(k-1)}(a) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Demonstração. (*)

Seja $q_1(x) = 1$ e consequentemente grau p$\leq\ n-1$.
A fórmula de Taylor para o polinómio p relativamente a $x = a$ tem resto nulo e

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Tem-se assim

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a}$$

em que $A_k = \frac{1}{(k-1)!}p^{(k-1)}(a)$.

Seja $q_1(x) \neq 1$. Tem-se neste caso

$$\frac{p(x)}{q_1(x)} = A_1 + A_2(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

em que $\xi \in]0, x[$ e $A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(k-1)}(a)$. Assim

$$\frac{p(x)}{q_1(x)(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + R(x)$$

em que R é uma função racional cujo denominador não se anula em a. ■

Exemplo 4.6.6. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{x(x+1)^3}\,dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{4x+1}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)^3}$$

em que

$$\begin{cases} A + A_3 = 0 \\ 3A + 2A_3 + A_2 = 0 \\ 3A + A_3 + A_2 + A_1 = 4 \\ A = 1 \end{cases}$$

Note-se que as constantes A_1, A_2, A_3 podem ser determinadas resolvendo o sistema anterior ou recorrendo à fórmula

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(4+\frac{1}{x}\right)^{(k-1)}_{x=-1}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Recorrendo à fórmula anterior tem-se

$$A_1 = 4-1 = 3, \quad A_2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=-1} = -1, \quad A_3 = \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{1}{x^3}\right)_{x=-1} = -1.$$

Assim

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

e

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^2 = \ln(4/3) - \frac{9}{24}$$

Na integração de funções racionais é central a decomposição em fracções simples. Vai-se estabelecer em seguida um resultado que contém como casos particulares os anteriores.

Teorema 4.6.7 (Decomposição em fracções simples)**.** *Sejam p, q polinómios tais que grau $p <$ grau q. A função racional p/q é a soma de um número finito de fracções simples da forma*

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{B_1x + B_2}{((x-p)^2+q^2)^m}$$

em que $n, m \in \mathbb{N}$; $A, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$; $a, p, q \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (*) A função racional p/q é decomponível, da proposição 4.6.3, numa soma de parcelas em que q_i, $i = 1, \ldots, n$, são factores irredutíveis tais que grau $p_i <$ grau q_i

$$\frac{p(x)}{q_1(x)\ldots q_{n-1}(x)q_n(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

As parcelas da igualdade anterior são da forma

$$\text{(i)}\ \frac{p_1(x)}{(x-a)^n}, a \in \mathbb{R} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\tilde{p}_1(x)}{q^m(x)}, \qquad q(x) = (x-p)^2 + q^2, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

em que $p_1, \tilde{p}_1$ são polinómios. A decomposição das parcelas da forma (i) foi analisada na proposição 4.6.5, quanto a (ii) tem-se

$$\frac{p_1(x)}{q^m(x)} = \frac{B_1x + C_1}{q^m(x)} + \frac{B_2x + C_2}{q^{m-1}(x)} + \ldots + \frac{B_mx + C_m}{q(x)}$$

igualdade estabelecida por recorrência a partir das igualdades

$$p_1(x) = q_1(x)q(x) + c_0(x) \qquad q_1(x) = q_2(x)q(x) + c_1(x)$$

em que q_1, c_0, q_2, c_1 são polinómios que se obtêm de divisões inteiras. [5] ■

Exemplo 4.6.8. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$$

Seja

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

em que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 2 \end{cases}$$

uma vez que do princípio da identidade de polinómios

$$x + 2 = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + A - C\ .$$

Tem-se assim

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Como o primeiro integral é imediato analise-se apenas a determinação do segundo integral. Tem-se

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{x+1}{(x-p)^2+q^2}$$

[5] Não existe fórmula para as constantes correspondentes às raízes complexas se existir contudo só um factor desse tipo pode obter-se fazendo a diferença com os factores associados às raízes reais.

em que $p = -1/2, q = \sqrt{3}/2$. Ora recorrendo ao método de substituição para $x = \varphi(t) = p + qt = -1/2 + \sqrt{3}t/2$, $\varphi'(t) = \sqrt{3}/2$ tem-se

$$\Phi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}.\frac{2t}{1+t^2}$$

concluindo-se que

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$

Assim, uma vez que $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, tem-se

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln|x-1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}) - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)\right]_2^3$$

Exemplo 4.6.9. *Determine-se o integral*

$$\int_2^3 \frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$$

Tem-se

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

em que

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -B + C = -1 \\ 4A + 2B - C + D = 6 \\ -2B + 2C + E - D = -4 \\ 4A - 2C - E = 7 \end{cases}$$

uma vez que do princípio da identidade de polinómios

$$x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x + 7 =$$

$$= (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (4A+2B-C+D)x^2 + (-2B+2C+E-D)x + 4A - 2C - E\ .$$

Tem-se assim

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{x^2+2}\,dx + \int_2^3 \frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

O primeiro integral é imediato. Determine-se uma primitiva com vista à determinação do segundo integral.
Tem-se

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}$$

Analise-se agora o terceiro integral.
Tem-se

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

em que

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{-1}{(x^2+2)}$$

e

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2-x^2}{(x^2+2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx$$

e usando o método de primitivação por partes na última parcela

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \int x\frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

obtém-se

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx\right)$$

Assim

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \left[\ln|x-1| - \frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+2}\right]_2^3$$

Em conclusão de uma forma sucinta tem-se como método de integração das funções racionais representadas pela fracção própria p/q

(A) *Decomposição em fracções simples da função integranda.*

(Ai) São polinómios irredutíveis de coeficientes reais:

- $ax+b$, $a \neq 0$ (polinómio de 1º grau com raiz real).
- ax^2+bx+c, em que $b^2-4ac<0$ (polinómio de 2º grau sem raizes reais).

(Aii) Qualquer polinómio $q(x)$ de coeficientes reais tem uma factorização

$$q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_m)^{r_m}\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^{s_1}\dots\left((x-p_m)^2+q_m^2\right)^{s_m}$$

em que $\alpha_1,\dots,\ \alpha_m$ são raízes reais de polinómios com graus de multiplicidade $r_1,\dots,\ r_m$ e $p_1 \pm q_1 i,\dots,\ p_m \pm q_m i$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$ são raízes complexas de polinómios com graus de multiplicidade $s_1,\dots,\ s_m$

$(Aiii)$ À factorização do polinómio associa-se a decomposição em fracções simples da função racional.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\dots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\dots+\frac{A_{m1}}{x-\alpha_m}+\frac{A_{m2}}{(x-\alpha_m)^2}\dots+\frac{A_{mr_m}}{(x-\alpha_m)^{r_m}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x-p_1)^2+q_1^2}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^2}+\dots+\frac{B_{s_11}x+C_{s_11}}{\left((x-p_1)^2+q_1^2\right)^{s_1}}+\dots+$$

$$+\dots+\frac{B_{n1}x+C_{n1}}{(x-p_n)^2+q_n^2}+\frac{B_{n2}x+C_{n2}}{\left((x-p_n)^2+q_n^2\right)^2}+\dots+\frac{B_{ns_n}x+C_{ns_n}}{\left((x-p_n)^2+q_n^2\right)^{s_n}}.$$

(B) *Integração das fracções simples.*

$(B.i)$

$$\int \frac{A_n}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{A_n}{(1-n)(x-a)^{n-1}} & \text{se} \quad n>1 \\[2ex] A_1 \ln|x-a| & \text{se} \quad n=1 \end{cases}$$

$(B.ii)$

$$\int \frac{B_m x + C_m}{\left((x-p)^2+q^2\right)^m}\,dx$$

Recorrendo à substituição $\varphi(t) = p+qt = x$ tem-se

$$\int \frac{B_m p + B_m qt + C_m}{((qt)^2 + q^2)^m}.q\ dt = \int \frac{M_m t}{(t^2+1)^m}\ dt + \int \frac{N_n}{(t^2+1)^n}\ dt$$

em que

$$\int \frac{M_m t}{(t^2+1)^m\ dt} = \begin{cases} \dfrac{M_m}{2(1-m)(t^2+1)^{m-1}} & \text{se} \quad m > 1 \\ \\ \dfrac{M_1}{2}\ln(t^2+1) & \text{se} \quad m = 1 \end{cases}$$

e

$$\int \frac{N_m}{(t^2+1)^m}\ dt = \begin{cases} N_m \operatorname{arctg}(t) & \text{se} \quad m = 1 \\ \\ \text{fórmula de recorrência} & \text{se} \quad m > 1 \end{cases}$$

Note-se que se $m > 1$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} + \frac{1}{2m-2}.\frac{t}{(t^2+1)^{m-1}}.$$

sendo o resultado final obtido aplicando $m-1$ vezes a primitivação por partes até obter primitiva de $\dfrac{1}{t^2+1}$.

(C) Aplicação da propriedade da linearidade dos integrais.

4.7 Integração de funções irracionais e de funções trigonométricas

Comece-se por analisar a integração de classes de funções irracionais. Considerem-se as classes de funções:

$$\text{(i)} \quad R\left(x, \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{(ii)} \quad R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

em que $R(x, y)$ representa uma função racional separadamente em cada uma das variáveis x e y.

(i) Seja o integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

A substituição

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = t \Rightarrow x = \frac{\alpha - \beta t^2}{1-t^2} = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = \frac{2(\alpha-\beta)t}{(1-t^2)^2}$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I = 2(\alpha-\beta)\int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2}, t\right) \frac{t}{(1-t^2)^2}\, dt$$

Exemplo 4.7.1. *Determine-se o integral*

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx$$

Considere-se

$$\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = t \Rightarrow x = \frac{2t^2+1}{1+t^2} = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

Tem-se

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx = \int \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2-x}\, dx$$

Ora

$$\int \frac{1}{t}.\frac{1}{2-\varphi(t)}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt = 2\int \frac{1}{(1+t^2)}\, dt = 2\operatorname{arctg} t + C$$

Assim

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx == [2\operatorname{arctg} t]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

(ii) Seja o integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

• Se $b^2 - 4ac > 0$

O trinómio ax^2+bx+c tem duas raízes reais α, β e é aplicável o procedimento anterior já que

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}\,(x-\beta)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{a}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(x-\beta)\,, \qquad a>0$$

• Se $b^2-4ac<0$, $a>0$
A substituição

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$$

em que

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x)$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I = \int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\varphi(t),t\right)\varphi'(t)\,dt$$

Exemplo 4.7.2. *Determine-se o integral*

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx$$

Considere-se

$$\sqrt{x^2+k^2} = x+t \Rightarrow x = \frac{k-t^2}{2t} = \varphi(t) \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = -\frac{k^2+t^2}{2t^2}$$

Tem-se

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(x+t)^2(x+t)}\frac{k^2+t^2}{2t^2}\,dt =$$

$$= -4\int_{t_1}^{t_2} \frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^2}\,dt = \left[\frac{2}{t^2+k^2}\right]_{t_1}^{t_2}$$

em que $t_1 = -1+\sqrt{1+k^2}$ e $t_2 = -2+\sqrt{4+k^2}$.

Considere-se a finalizar a secção a integração de uma classe de funções trigonométricas. Seja o integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} R\left(\operatorname{sen} x, \cos x\right)\,dx$$

A substituição

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t)\,, \qquad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

e

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

permite reduzir a determinação do integral I à determinação de um integral cuja função integranda é uma função racional.

$$I = 2\int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Exemplo 4.7.3. *Determine-se o integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$$

Considere-se

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

Tem-se

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right)}\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln|t+1|]_0^1 = \ln 2$$

já que $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$

4.8 Exercícios

4.8.1 Exercícios resolvidos

Exerc 4.8.1. *Determine o valor dos seguintes integrais:*

$$i)\quad \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 x\cos x\,dx$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

ii) Recorrendo ao método de integração por partes

$$\int_0^1 x\cos x\,dx = [x\,\mathrm{sen}\,x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{sen}\,x\,dx = \mathrm{sen}\,1 + \cos 1 - 1$$

■

Exerc 4.8.2. *Determine o valor dos integrais*

$$i)\quad \int_0^{1/2} \frac{4x\,\mathrm{arcsen}\,x^2}{\sqrt{4-(\sqrt{2}x)^4}}\,dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_0^{1/2} \frac{8x\,\mathrm{arcsen}\,x^2}{\sqrt{4-(\sqrt{2}x)^4}}\,dx = \left[\mathrm{arcsen}^2\,x^2\right]_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{36}$$

ii) Recorrendo ao método de integração por partes

$$\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,dx = [x\,\mathrm{arctg}\,x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= (1.\,\mathrm{arctg}\,1 - 0.\,\mathrm{arctg}\,0) - \left[\ln\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \pi/4 - \ln\sqrt{2}$$

■

Exerc 4.8.3. *Determine o valor dos integrais*

$$i)\quad \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-(\ln x)^2}}, \qquad\qquad ii)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sh}\,x\,dx.$$

Resolução.

i) Directamente da fórmula de Barrow

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{\frac{1}{2x}}{\sqrt{1-(\frac{\ln x}{2})^2}}dx = \left[\mathrm{arcsen}\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right]_1^e = \frac{\pi}{6}.$$

ii) Tem-se, recorrendo ao método de integração por partes,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = [-\cos x \ \operatorname{sh} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \ \operatorname{ch} x \, dx$$

Aplicando mais uma vez o método de integração por partes tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ \operatorname{ch} x \, dx = [\operatorname{sen} x \ \operatorname{ch} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx$$

Assim obtém-se a equação

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = [-\cos x \ \operatorname{sh} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx$$

Concluindo-se que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} x \, dx = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}{2}$$

■

Exerc 4.8.4. *Determine o valor dos integrais*

$$i) \quad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2} \, dx$$

Resolução.

i)

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = [\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2} \, dx = A \int_0^1 \frac{1}{x+2} \, dx + B \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \, dx + C \int_0^1 \frac{1}{x+1} \, dx =$$

$$= A[\ln(x+2)]_0^1 - B[\frac{1}{x+1}]_0^1 + C[\ln(x+1)]_0^1.$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$x^2 = (A+C)x^2 + (2A+B+3C)x + A + 2B + 2C$$

Tem-se $A = 4,\ B = 1,\ C = -3$ concluindo-se que:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)(x+1)^2}\,dx = 4\ln(3/2) + 1/2 - 3\ln(2).$$

■

Exerc 4.8.5. *Determine, usando o método de substituição, o valor do integral*

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}dx$$

Sugestão: Utilize a substituição $\sqrt{x-1} = t$

Resolução. Aplicando o método de integração por substituição

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t+2}.t\,dt = .$$

$$= \int_1^2 \frac{t^3+t}{t+2}\,dt = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 5 + \frac{-10}{t+2}\right)\,dt =$$

$$= \left[t^3/3 - t^2 + 5t - 10\ln(t+2)\right]_1^2 = 13/3 - 10\ln(4/3)$$

■

Exerc 4.8.6. *Determine, usando o método de substituição, o valor do integral*

$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2}.$$

Sugestão: Utilize a substituição $e^x = t$

Resolução. Aplicando o método de integração por substituição

$$\int_1^2 \frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{(t-1)^2 t} = .$$

$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}\right)dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{t}dt + \int_e^{e^2} \frac{-1}{t-1}dt + \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)^2}dt = .$$

$$= [\ln t]_e^{e^2} - [\ln(t-1)]_e^{e^2} - \left[\frac{1}{t-1}\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{e^2}{e^2-1}\right) + \frac{e}{e^2-1}.$$

■

Exerc 4.8.7. *Calcule o seguinte integral por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}(t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx.$$

(Sugestão: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}$*)*

Resolução. Sendo $x = \varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}(t)$, $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ e

$$\operatorname{sen}(2\,\mathrm{arctg}(t)) = \frac{2\,\mathrm{tg}(\frac{(2\,\mathrm{arctg}(t))}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{(2\,\mathrm{arctg}(t))}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt = [-2(t+1)^{-1}]_0^1 = 1.$$

■

Exerc 4.8.8. *Considere a função* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *injectiva e diferenciável, com derivada contínua, tal que,* $f'(x) \neq 0$ *para* $x \in [a,b]$.
Mostre que se $f([a,b]) = [c,d]$*, a função inversa* $f^{-1} : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável e*

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,dy = f^{-1}(d).d - f^{-1}(c).c - \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f(x)\,dx.$$

Resolução. f^{-1} é contínua em $[c,d]$ e consequentemente integrável. Integrando por partes

$$\int_c^d f^{-1}(y).1\,dy = [f^{-1}(y).y]_c^d - \int_c^d (f^{-1})'(y).y\,dy$$

Ora sendo $y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Assim integrando por substituição em que $x = f^{-1}(y)$

$$\int_c^d (f^{-1})'(y).y\,dy = \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} \frac{1}{f'(x)}.f(x).f'(x)\,dx.$$

■

Exerc 4.8.9. *Considere a função* $F :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt$$

i) Defina a derivada de $F(x)$

ii) A função F *é monótona? Justifique.*

Resolução.

i) Sendo

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt \quad \text{e} \quad f(x) = \cos x$$

a função $F = F_1 \circ f$. Assim pela derivada da função composta

$$F'(x) = F_1'(f(x)).f'(x)$$

Ora $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e pelo teorema fundamental do cálculo integral

$$F_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}} \qquad x \in]-1, 1[$$

Em conclusão

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(4-\cos^2 x)}} \qquad x \in]0, \pi[$$

ii) A função F é monótona, estritamente crescente, em $x \in]0, \pi[$ uma vez que

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(4-\cos^2 x)}} > 0, \qquad x \in]0, \pi[$$

■

Exerc 4.8.10.

Considere a função $G : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_0^{x+x^2} \frac{t^2}{t^4+1} dt$$

i) Defina justificando a função derivada de G.

ii) O contradomínio de G *está contido em* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$*? Justifique.*

Resolução.

i) Sendo

$$G_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt \quad \text{e} \quad f(x) = x + x^2$$

a função $G = G_1 \circ f$. Assim pela derivada da função composta

$$G'(x) = G_1'(f(x)).f'(x)$$

Ora $f(x) = x + x^2$ e pelo teorema fundamental do cálculo

$$G_1'(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

Em conclusão tem-se

$$G'(x) = \frac{(x+x^2)^2}{(x+x^2)^4+1}(2x+1)$$

ii) Sim, tem-se $CD_G = \{G(x) : x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Da alínea anterior deduz-se que G, em que $G(0) = 0$, é uma função contínua crescente, pois $G'(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, concluindo-se do teorema de Bolzano e da monotonia da função G que $CD_G \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

■

Exerc 4.8.11. *Considere a função* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_0^{\cos 2x} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

i) Calcule $G(0)$.

ii) A função G *é diferenciável no seu domínio? Justifique e em caso afirmativo determine a função derivada de* G.

Resolução.

i) Tem-se pela fórmula de Barrow

$$G(0) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = [(1+t^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

ii) A função $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e do teorema fundamental do cálculo, $G_1(x) = \int_0^x \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Assim a função $G = G_1 \circ f$, em que $f(x) = \cos 2x$, é diferenciável pois resulta da composição de funções diferenciáveis tendo-se

$$G'(x) = -2 \operatorname{sen} 2x \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}$$

■

Exerc 4.8.12. *Considere a função* $G :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_1^{2+\cos x} \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt.$$

i) Calcule $G(\frac{3\pi}{2})$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Resolução.

i)

$$G(\frac{3\pi}{2}) = \int_1^{2+\cos 3\pi/2} \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt = \int_1^2 \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt.$$

A função integrando é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\frac{1}{t^3+2t^2+t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$

em que $A = 1$, $B = -A$ e $C = -1$ já que

$$1 = (A+B)t^2 + (2A+B+C)t + A\ .$$

Assim

$$\int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2})dt = [\ln t - \ln(t+1) + (t+1)^{-1}]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3 - 1/6.$$

ii) Do teorema fundamental do cálculo, uma vez que $f(t) = \dfrac{1}{t^3 + 2t^2 + t}$ é uma função contínua no domínio e, do teorema da derivada da função composta tem-se que G é uma função diferenciável em $]1/2, +\infty[$ tendo-se para $x > 1/2$

$$G^{'}(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^3 + 2(2+\cos x)^2 + (2+\cos x)}$$

■

Exerc 4.8.13. *Sabendo que f tem derivadas contínuas até à 2ª ordem em $\mathbb{R}$, e que para $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$, mostre que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

Resolução. Recorrendo ao método de integração por partes

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = [tf'(t)]_a^x - \int_a^x tf''(t)dt =$$

$$= xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)dt = xf'(x) - af'(a) + xf'(a) - xf'(a) - \int_a^x tf''(t)dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + x(f'(x) - f'(a)) - \int_a^x tf''(t)dt = (x-a)f'(a) + x\int_a^x f''(t)dt - \int_a^x tf''(t)dt$$

Assim

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

■

Exerc 4.8.14. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que se F é uma primitiva de f em $[a,b]$,*

$$\int_a^b f^2(x)dx = F(b)F'(b) - F(a)F'(a) - \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$

Resolução. Sendo f é diferenciável e F uma primitiva de f tem-se que f é contínua e que $F'(x) = f(x)$. Assim integrando por partes

$$\int_a^b f(x)f(x)dx = [f(x)F(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)F(x)dx$$

Ora

$$[f(x)F(x)]_a^b = F(b)F'(b) - F(a)F'(a).$$

e

$$\int_a^b f'(x)F(x)dx = \int_a^b F(x)F''(x)dx.$$

o que conduz de imediato à proposição que se queria demonstrar. ■

Exerc 4.8.15. *Calcule a área da região limitadas pela curva* $y^2 = x(1-x)^2$ *e as rectas* $x = 0$ *e* $x = 1/2$.

Resolução. Sendo A a área da região tem-se

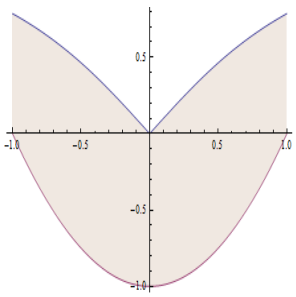
$$A = 2\int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)^2}dx = 2\int_0^{1/2} \sqrt{x}\,(1-x)\,dx = 2\left(\int_0^{1/2} x^{1/2}dx - \int_0^{1/2} x^{3/2}dx\right)$$

Aplicando a fórmula de Barrow obtém-se

$$A = 2\left(\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^{1/2}\right) = \frac{27}{30}\sqrt{2}.$$

■

Exerc 4.8.16. *Determine a área da região plana delimitada pelas rectas verticais de equações* $x = -1$, $x = 1$ *e pelos gráficos das funções* $\operatorname{arctg}|x|$, $x^2 - 1$.



As funções $\operatorname{arctg}|x|$, $x^2 - 1$ são funções pares tendo-se

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}|x| - (x^2-1)\right)\,dx = 2\int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - (x^2-1)\right)\,dx$$

Ora usando a primitivação por partes

$$\int 1.\operatorname{arctg} x\,dx = x.\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Assim

$$A = 2\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} - \ln 2$$

4.8.2 Enunciados de exercícios

Exerc 4.8.17. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i)\quad \int_1^2 (\frac{1}{x}-1)dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Exerc 4.8.18. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i)\quad \int_0^1 (x-e^x)dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

Exerc 4.8.19. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\operatorname{sen} x)dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$$

Exerc 4.8.20. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

Exerc 4.8.21. *Determine o valor dos seguintes integrais*

$$i)\quad \int_1^2 (\frac{1}{\sqrt{x}}-1)dx \qquad\qquad ii)\quad \int_0^1 xe^x\,dx$$

Exerc 4.8.22. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$, *o integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx.$$

(Sugestão: $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$*)*

Exerc 4.8.23. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, *o integral*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

Exerc 4.8.24. *Calcule por substituição, recorrendo à função* $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}(t)$, *o integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\operatorname{sen} x+2}dx.$$

(Sugestões: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$ *;* $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$*)*

Exerc 4.8.25. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$F(x) = \int_1^{2x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$$

i) Calcule $F(1)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.26. *Considere a função* $G :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$G(x) = \int_1^{2x^2} \frac{1}{1+4t^2} dt.$$

i) Calcule $G(1)$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.27. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t+1}}\, dt.$$

i) Calcule $F(1)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Exerc 4.8.28. *Considere a função* $G :]1/3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$G(x) = \int_1^{3x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

i) Calcule $G(1)$.

ii) Justifique que G *é diferenciável em* $]1/3, +\infty[$ *e calcule* $G'(x)$, *para* $x > 1/3$.

Exerc 4.8.29. *Considere a função* $F :]1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$F(x) = \int_1^{2+\operatorname{sen} x} \frac{2}{t^3+t}\, dt.$$

i) Calcule $F(\pi)$.

ii) Justifique que F *é diferenciável em* $]1/2, +\infty[$ *e calcule* $F'(x)$, *para* $x > 1/2$.

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.