Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I,

Amélia Bastos, António Bravo, Paulo Lopes

2011

Introdução

Neste texto apresentam-se os enunciados de conjuntos de exercícios para as aulas de problemas do curso de Cálculo Diferencial e Integral I do Mestrado em Engenharia Aeroespacial e do Mestrado em Engenharia Mrcância.

Complementam-se esses enunciados com conjuntos de exercícios resolvidos versando a matéria associada a cada um dos referidos conjuntos de exercícios.

1ª Ficha de problemas

Princípio de indução matemática. O axioma do supremo e suas consequências

---

1. Usando o princípio de indução matemática, demonstre as seguintes afirmações:

   a) $5^{2n} - 1$ é divisivel por 8, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

   b) $n < 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$

   c)
   $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

   d)
   $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Mostre que o conjunto
   $$\{x \in \mathbb{R} : \ |x-2| + |x+1| < 5\}$$
   é limitado.

3. Considere os seguintes conjuntos:

   $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x|+1 > 2x\}$ $\qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^4+3x^3+2x^2 \leq 0\}$ $\qquad C = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

   (a) Mostre que $A =]-\infty, 1[$ e $B = [-2, -1] \cup \{0\}$. Verifique se os conjuntos A, B, C, $A \cap B \cap C$, são majorados ou minorados e caso sejam, indique em $\mathbb{R}$ o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.

   (b) Caso existam, determine em $\mathbb{R}$ o supremo, infimo, máximo e minimo de cada um dos conjuntos A, B, C, $A \cap B \cap C$.

4. Mostre que, se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$, tais que, $\sup X > \inf Y$, existem $x \in X$ e $y \in Y$, tais que, $y < x$

Exercícios resolvidos

Recorrendo ao método de indução matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o natural $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

Resolução. Pretende-se provar que $n^3 + 2n = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Para base da indução tem-se, com $n = 1$,

$$1^3 + 2.1 = 3 \Rightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$$

logo a base da indução é uma proposição verdadeira. Para o passo indutivo, $n^3+2n = 3k \Rightarrow (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$, tem-se

$$(n+1)^3+2(n+1) = (n^3+2n)+(3n^2+3n+3) = 3(k+n^2+n+1) \Rightarrow k' = k+n^2+n+1 \in \mathbb{Z}$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro e proposição é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2^{a} **Ficha de problemas**

Sucessões de números reais

---

1. Considere a sucessão x_n

$$x_1 = \frac{3}{2} \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

   a) Recorrendo ao princípio de indução matemática, verifique que $1 < x_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Mostre que a sucessão é decrescente.

   c) A sucessão x_n é convergente em $\mathbb{R}$? Justifique.

2. Seja u_n o termo geral de uma sucessão tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

   a) Justifique que a sucessão u_n é convergente. Mostre ainda, recorrendo à definição de limite, que o limite de u_n não pode ser um número negativo.

   b) Indique o supremo e o ínfimo do conjuntos dos termos da sucessão e conclua se este conjunto tem máximo ou mínimo? Justifique abreviadamente as respostas.

3. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

$$a)\frac{n^2-1}{n^4+3}, \quad b)\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}, \quad c)\frac{n^{\frac{1}{2}}+n}{n^{\frac{1}{3}}+(n^2+1)^{\frac{5}{2}}}, \quad d)(1+\frac{1}{n^3})^{n^2}, \quad e)\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} 9^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}+9^{\frac{n}{2}}}.$$

4. Considere as sucessões x_n e y_n, tais que x_n é uma sucessão monótona, y_n é uma sucessão limitada

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   a) Mostre que a sucessão x_n é limitada.

   b) Mostre que as sucessões x_n e y_n são convergentes e que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$$

3ª Ficha de problemas

Sucessões de números reais

---

1. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

$$a)\frac{n^n}{3^n n!}, \quad b)\frac{3^n}{n^2}, \quad c)\frac{n^{80}+n!}{n^n+50n!}, \quad d)\sqrt[n]{(n+1)!-n!}$$

2. Analise as sucessões u_n, v_n e w_n do ponto de vista da convergência e determine, caso existam, os seus sublimites

$$a)u_n = \cos(n!\pi), \quad b)v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad c)w_n = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) + \cos(\frac{n\pi}{2})$$

3. a) Mostre que se u_{2n} converge para $a \in \mathbb{R}$ e u_{2n+1} converge para $b \in \mathbb{R}$, então a e b são os únicos sublimites de u_n.

   b) Mostre que se u_{2n}, u_{2n+1}, u_{3n} são convergentes então u_n é convergente.

4. Considere a sucessão de termos positivos, x_n, definida por

$$x_1 = 3 \qquad x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{x_n+3}$$

   a) Mostre que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{6|x_{n+1} - x_n|}{(x_n+3)(x_{n+1}+3)}.$$

   b) Mostre que a sucessão x_n é contrativa ou seja que existe $0 < c < 1$ tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$

   c) Sendo x_n convergente, determine o valor de $\lim x_n$.

Exercícios resolvidos

Considere a sucessão majorada u_n, definida por

$$u_1 = \sqrt{2}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

i) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente crescente.

ii) A sucessão u_n é convergente? Justifique.

iii) Determine o limite da sucessão $v_n = \dfrac{3^{2n+2} + 3^{2n-1}}{9 + 9^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Resolução.

i) Pretende-se provar que $u_{n+1} - u_n > 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, $u_2 - u_1 = \sqrt{3\sqrt{2} + 2} - \sqrt{2} > 0$. A base da indução é, portanto, verdadeira. Para $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $u_{m+1} - u_m > 0$ então $u_{m+2} - u_{m+1} > 0$.
Da definição da sucessão, tem-se

$$u_{m+2} - u_{m+1} = \sqrt{3u_{m+1} + 2} - \sqrt{3u_m + 2} = \frac{\overbrace{u_{m+1} - u_m}^{\text{(da hipótese de indução) } >0}}{\sqrt{3u_{m+1} + 2} + \sqrt{3u_m + 2}} > 0$$

Pelo princípio de indução matemática $u_{n+1} - u_n > 0$, $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão u_n é estritamente crescente.

ii) Da alínea anterior, como u_n é estritamente crescente é limitada inferiormente, sendo o seu primeiro termo, u_1, um dos minorantes do conjunto dos seus termos. Sendo u_n também majorada conclui-se que a sucessão u_n é uma sucessão limitada. A sucessão u_n é assim convergente pois é uma sucessão monótona e limitada.

iii)

$$v_n = \frac{3^{2n+2} + 3^{2n-1}}{9 + 9^{n+1}} = \frac{3^2 9^n + 3^{-1} 9^n}{9 + 9.9^n}$$

Dividindo ambos os membros da fracção pela exponencial dominante (de maior base), 9^n, vem

$$\frac{9 + 3^{-1}}{9^{1-n} + 9} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{9 + 3^{-1}}{0 + 9} = \frac{28}{27}$$

Considere a sucessão

$$u_n = (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n} \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

i) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto dos termos da sucessão u_n.

ii) A sucessão é convergente? Justifique.

iii) A subsucessão u_{3n} é convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o sublimite.

Resolução.

i) Tem-se

$$u_{4n} = u_{4n+2} = u_{2n} = 0 \ , \ u_{4n+1} = \frac{-1}{4n+1} \text{ e } u_{4n+3} = \frac{1}{4n+3}$$

Como as subsucessões indicadas contêm todos os termos da sucessão u_n, u_{4n+1} é crescente e u_{4n+3} é decrescente resulta que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$u_1 = -1 \leq u_n \leq 1/3 = u_3$$

Então, sendo $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\sup U = \max U = 1/3 \text{ e } \inf U = \min U = -1$$

ii) Como u_n é o produto de uma sucessão limitada, $a_n = (-1)^n \operatorname{sen}(n\pi/2)$, por um infinitésimo, $b_n = 1/n$, $u_n \to 0$ logo trata-se de uma sucessão convergente.

iii) Dado que, pela alínea anterior, u_n é uma sucessão convergente, qualquer subsucessão de u_n é convergente para o limite de u_n. Logo u_{3n} é convergente e o seu limite é 0.

Considere a sucessão convergente $v_n = x_n + y_n$, $n \in \mathbb{N}$ em que

$$x_n = \frac{2^{n+5} - 3^n}{3^{n+1} + 2^{2n}} + \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n! + 1}}$$

e

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{5}{y_n}\right) \ , \ y_1 = 1$$

Determine o limite da sucessão v_n

Resolução. Tem-se

$$\frac{2^{n+5}-3^n}{3^{n+1}+2^{2n}} = \frac{2^{-n+5}-(3/4)^n}{3(3/4)^n+1} \to \frac{0-0}{3-0+1} = 0$$

e

$$\frac{\frac{(n+3)!}{(n+1)!+1}}{\frac{(n+2)!}{n!+1}} = \frac{(n+3)!}{(n+2)!}\frac{n!+1}{(n+1)!+1} =$$

$$\frac{1+3n^{-1}}{1+n^{-1}}\frac{1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{(n+1)!}} \to \frac{1+0}{1+0}\frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n!+1}} \to 1$$

Logo $x_n \to 0+1 = 1$. Então, como $y_n = v_n - x_n$, y_n é uma sucessão convergente. Sendo $a \in \mathbb{R}$ o seu limite, $y_{n+1} \to a$ pois é uma subsucessão de y_n. Aplicando limites a ambos os termos da igualdade que define, por recorrência, y_n, tem-se, visto que todas as sucessões envolvidas são convergentes,

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{5}$$

Como $y_1 > 0$ e $y_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > 0$, y_n é, por indução, uma sucessão de termos positivos. Assim, o seu limite não pode ser negativo e $a = \sqrt{5}$. Conclui-se, assim, que $v_n \to 1 + \sqrt{5}$

4ª Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Continuidade e limites.

---

1. Considere a função $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

   a) Calcule

$$\lim_{x \to -1} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} f(x)$$

   b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou mínorada e se tem máximo ou mínimo em $]-1,1[$.

   c) Se x_n for uma sucessão com termos em $]-1,1[$, convergente para 1, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.

   d) Dê um exemplo de uma sucessão y_n, de termos em $]-1,1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

2. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x\to 0}(1 - x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})) = 1$

3. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1,

$$f(x) = \begin{cases} a\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}x) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \mathrm{arcsen}(x) & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 \quad \text{se} \quad x \leq -1. \end{cases}$$

   a) Determine a.

   b) Determine $f(\frac{4}{\pi}\arccos(-\frac{4}{5}))$ e $f(\cos(\frac{5\pi}{12}))$.

   c) Estude a função f do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função f. Indique ainda se a função tem no domínio máximo, mínimo, supremo ou ínfimo e, no caso de existência, indique o valor.

   d) Diga se existem e, no caso de existência, calcule os limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

4. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, uma função contínua, justifique que:

a) Não existe qualquer sucessão x_n de termos em $[0,1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = n$.

b) Se existe uma sucessão x_n de termos em $[0,1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = \frac{1}{n}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

5. Seja $f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, uma função contínua, verificando a condição $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

   a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1,1]$? Justifique.

   b) Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \operatorname{tg}(f(u_n))$, em que $u_n = \frac{1-n}{n}$.

5ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade.

---

1. Defina a derivada das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \qquad b)\ g(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}, \qquad c)\ h(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2).$$

2. Determine, conhecendo as derivadas das funções tangente e seno, as derivadas das funções:

$$a)\ h_1(x) = \mathrm{arctg}\, x,\ \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad b)\ h_2(x) = \mathrm{arcsen}\, x,\ \ \forall x \in [-1,1]$$

3. Determine a derivada para cada uma das seguintes funções:

$$a)\ e^{\mathrm{arctg}\, x},\ x \in \mathbb{R} \quad b)\ (\ln x)^x,\ x \in]1,+\infty[\quad c)\ x^{x^{x-1}},\ x \in \mathbb{R}^+$$

4. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \mathrm{arctg}(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $f'(a)$ e $f'(b)$ e escreva equações das tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa a e b.
   b) Justifique que $f'(0) = 1$.
   c) Utilize os resultados de a) e b) para justificar que f não tem extremos locais.

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2+e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \forall x \neq 0$$

   Determine as derivadas laterais de f no ponto 0.

6. Seja a função definida por $y = \sqrt{\mathrm{ch}\, x - 1}$. Indique para a função referida o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada.
   Determine as derivadas laterais em 0.

7. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada das funções:

$$a)\ \ln(x\,\mathrm{sh}\, x); \quad b)\ \mathrm{arcsen}(\mathrm{arctg}\, x); \quad c)\ \frac{e^x}{1+x}; \quad d)\ \ln(\mathrm{arcsen}(\frac{x+1}{x-1}))$$

8. Sejam a, b reais e f uma função contínua em $[a,b]$ duas vezes diferenciável em $]a,b[$. Suponha que o gráfico de f e o segmento de recta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ se intersectam um ponto $(x_0, f(x_0))$ com x_0 pertencente a $]a,b[$. Mostre que existe c pertencente a $]a,b[$ tal que $f''(c) = 0$.

6ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade

---

1. Determine os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x}\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}x}\quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\quad d)\ \lim_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x-1}}$$

2. Calcule

$$a)\ \lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{sen}x}\quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2e^{\ln^2 x}}\quad d)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{ch}x)^{\coth x}$$

3. Seja $f:[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2)+1$
   a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x.
   b) Determine um majorante para o erro que se comete em $[-1/2,1/2]$ ao aproximar f pelo polinómio indicado em a).

4. Prove que se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais em α e β, com $\alpha<\beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.
   Escreva a fórmula de Taylor para g e com resto de Lagrange de segunda ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x)>g(\beta)$ para $x>\beta$.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{1-x^2}$
   a) Estude a função f do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.
   b) Complete o estudo da função f, considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões e assíntotas. Esboce o gráfico da função f.

Exercícios resolvidos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \text{ arctg } x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \mathrm{e}^{\,x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

i) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função é contínua no ponto 1.

ii) Sendo $\alpha = \frac{4}{\pi}$, determine a função derivada de f.

iii) Verifique que f é uma função crescente. Determine, justificando, o seu contra-domínio.

Resolução.

i) Como f está definida à esquerda e à direita do ponto 1 por expressões diferentes, f é contínua nesse ponto sse existirem e forem iguais os limites laterais $f(1^-)$ e $f(1^+)$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} \alpha \operatorname{arctg} x = \alpha \operatorname{arctg} 1 = \alpha \frac{\pi}{4} \\ f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}^{\,x-1} = \mathrm{e}^{\,0} = 1 \end{aligned}$$

Logo f é contínua em 1 sse $\alpha\frac{\pi}{4} = 1$ isto é sse $\alpha = \frac{4}{\pi}$.

ii) Comece-se por notar que f é diferenciável em todos os pontos $x \neq 1$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com o produto ou a composta de funções diferenciáveis em todo o seu domínio (neste caso a exponencial, o arco-tangente e funções polinomiais). Assim sendo, podem aplicar-se as regras de derivaáão e obtém-se (sempre para $x \neq 1$ e $\alpha = \frac{4}{\pi}$):

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{(x)'}{1+x^2} & \text{se} \quad x > 1 \\ (x-1)'\mathrm{e}^{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad x > 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Falta verificar se existe derivada em 1. Como, novamente, a função é definida por expressões diferentes à esquerda e à direita do ponto, f é diferenciável em

1 sse $f'_e(1) = f'_d(1)$. Tem-se (note-se que $f(1) = 1$)

$$f'_e(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{e}^{\,x-1}-1}{x-1} = 1$$
$$f'_d(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x - 1}{x-1} = \lim_{y\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{\frac{4}{\pi}y-1}{\operatorname{tg} y - 1} = \frac{4}{\pi}\lim_{y\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} y - 1} =$$
$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_{y=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{4}{\pi}}{\cos^{-2}(\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\pi}$$

em que o primeiro limite é um limite notável e no segundo limite se fez a mudança de variável $y = \operatorname{arctg} x$ e se reconheceu o inverso do limite que dá a derivada da função $\operatorname{tg} y$ no ponto $\frac{\pi}{4}$. Então f não é diferenciável no ponto 1 e a derivada de f é definida por

$$f' : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad x > 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

iii) Como $\frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, f' é positiva em $]1, +\infty[$ e, como f é contínua em 1, f é crescente em $[1, +\infty[$. Por outro lado, como $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, f' é positiva em $]-\infty, 1[$ e, como f é contínua em 1, f é crescente em $]-\infty, 1]$. Então, f é crescente em $\mathbb{R}$. Assim sendo, tendo em conta que as desigualdades anteriores são estritas e, portanto f é estritamente crescente, $f(\mathbb{R}) =]f[-\infty), f[+\infty)[$. Tem-se, ainda,

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x = \tfrac{4}{\pi}\tfrac{\pi}{2} = 2$$
$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,x-1} = 0$$

e, portanto, o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) =]0, 2[$.

Sendo $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

i) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x+1$ associado à funáão f.

ii) Determine

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx$$

Resolução.

i) Dado que é a composta de um arctg com uma função racional, a função f é pelo menos 2 vezes diferenciável numa vizinhança do ponto -1.
O polinómio de Taylor de 2º grau, $p_2(x)$, em potências de $x+1$ associado à função f, define-se a partir do teorema de Taylor por:

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

com

$$f(-1) = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$f'(-1) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)_{x=-1} = \left(\frac{-1}{x^2+1}\right)_{x=-1} - \frac{1}{2}\,,$$

$$f''(-1) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)'_{x=-1} = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

i.e. $P_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{(x+1)}{2} - \frac{(x+1)^2}{4}$.

ii) Usando o método de integração por partes e fazendo $u' = 1$ e $v = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ vem $u = x$, $v' = \frac{-1}{x^2+1}$ e

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x)dx = \left[x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-x}{1+x^2}dx$$

$$= (\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}1) + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left(\sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{3}+3\right) + \ln\sqrt{2}$$

Considere a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)\ln|x-1| & \text{se } \ x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} & \text{se } \ x > 0 \end{cases}$$

i) Determine o domínio de diferenciabilidade de F e calcule F'.

ii) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio da função F.

iii) Considere a sucessão $w_n = 1 + 2^{-n}$. Determine o limite da sucessão $F(w_n)$.

iv) A função F restrita a $]0, +\infty[$ é invertível? Justifique e, em caso afirmativo, determine a derivada da função inversa em $F(1)$.

v) Justifique que existe $c \in]1, 3[$ tal que $F'(c) = -\pi/24$.

Resolução.

i) F é diferenciável em $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com a composta e o produto de funções diferenciáveis nos pontos correspondentes (neste caso, funções racionais cujos denominadores não se anulam, função logaritmo, função módulo cujo argumento não se anula, função arco-tangente e função raíz quadrada cujo argumento não se anula).

1ª Resolução Para saber se F é diferenciável na origem calculam-se as derivadas laterais usando a definição:

$$F'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1)\ln|x-1|}{x} = \lim_{x \to 0^-} (1-x)\frac{\ln(1-x)}{-x} = (1-0).1 = 1$$

usando o limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ e

$$F'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2}}{x} \lim_{y \to \pi/2^-} \frac{y - \pi/2}{\operatorname{cotg}^2 y} = \left. \frac{1}{-2\operatorname{cotg} y \operatorname{sen}^{-2} y} \right|_{y=\pi/2} = -$$

fazendo a mudança de variável $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}}$ e reconhecendo o limite assim obtido como o inverso do limite que define a derivada da função $\operatorname{cotg}^2 y$ no ponto $y = \pi/2$. Como F tem uma derivada lateral infinita na origem não é diferenciável na origem e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sendo a sua derivada definida, nesse conjunto, através das regras de derivação:

$$F'(x) = \begin{cases} \ln(1-x)+1 & \text{se } \ x<0 \\ \dfrac{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{1+(x^{-1/2})^2} & \text{se } \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} \ln(1-x)+1 & \text{se } \ x<0 \\ \dfrac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} & \text{se } \ x>0 \end{cases}$$

<u>2ª Resolução</u> Em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ podem-se usar as regras de derivação, obtendo:

$$F'(x) = \begin{cases} \ln(1-x)+1 & \text{se } \ x<0 \\ \dfrac{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{1+(x^{-1/2})^2} & \text{se } \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} \ln(1-x)+1 & \text{se } \ x<0 \\ \dfrac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} & \text{se } \ x>0 \end{cases}$$

Como $F(0^-) = \lim_{x\to 0^-}(x-1)\ln|x-1| = 0 = F(0)$ e $F(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} = \pi/2 - \pi/2 = 0$, F é contínua na origem. Tem-se, ainda

$$F'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} = -\infty$$

e

$$F'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \ln(1-x)+1 = 1$$

Assim, pelo Teorema de Lagrange, como F é contínua em $[-\epsilon,\epsilon]$ e diferenciável em $]-\epsilon,\epsilon[$, para algum $\epsilon>0$, e existem os limites laterais $F'(0^+)$ e $F'(0^-)$, tem-se que $F'_d(0) = F'(0^+) = -\infty$ e $F'_e(0) = F'(0^-) = 1$ logo F não é diferenciável na origem. Então o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e F' está definida, nesse conjunto, pela expressão obtida pelas regras de derivação.

ii) Pela alínea anterior, $F'(x)<0$ para $x\in\mathbb{R}^+$ e $F'(x)>0$ para $x\in\mathbb{R}^-$. Logo, dado que F é contínua na origem, F é estritamente decrescente em $[0,+\infty[$ e estritamente crescente em $]-\infty,0]$ e tem um máximo na origem com $F(0)=0$ que é o único extremo da função. Como

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}(x-1)\ln|x-1| = -\infty(+\infty) = -\infty$$

tem-se que, pelo estudo da monotonia apresentado, o contradomínio de F é $F(\mathbb{R}) = F(\mathbb{R}_0^-)\cup F(\mathbb{R}^+) =]-\infty,0]\cup]-\frac{\pi}{2},0[=]-\infty,0]$.

iii) Como $w_n = 1+2^{-n}\to 1+0 = 1$ e F é contínua em 1, visto que é diferenciável nesse ponto (alínea (i)), o limite da sucessão $F(w_n)$ é $\lim F(w_n) = F(1) = \operatorname{arctg}(1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

iv) Pela alínea (ii), F é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$ logo é injectiva nesse intervalo e, portanto, F restrita a esse intervalo é invertível. Pelo teorema da derivada da função inversa tem-se, sendo G a inversa dessa restrição,

$$G'(F(1)) = \frac{1}{F'(G(F(1)))} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

v) Pela alínea (i), F é contínua em $[1,3]$ e diferenciável em $]1,3[$ pois é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. Então pelo teorema de Lagrange existe um $c \in]1,3[$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(3)-F(1)}{3-1} = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{1}}}{2} = \frac{\pi/6 - \pi/4}{2} = -\frac{\pi}{24}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Suponha que f é par e que existe, em$\mathbb{R}$, o limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

i) Mostre que f é limitada em $\mathbb{R}$.

ii) Supondo adicionalmente que a função satisfaz

$$f(n+1) = \frac{f(n)}{2^n}, \ \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

mostre que, necessariamente, se tem que verificar $L = 0$.

Resolução.

i) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, limitada em qualquer intervalo limitado. Por outro lado, como $f(+\infty) = L$, qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$ para $x > \frac{1}{\epsilon}$. Por simetria, visto que f é par, $f(x) \in]L-\delta, L+\delta[$ para $x < -\frac{1}{\epsilon}$. Então f é limitada em $\mathbb{R}$.

ii) Como existe $f(+\infty) = L$, pela definição de limite segundo Heine, existem e têm o mesmo valor os limites das sucessões $f(n+1)$ e $f(n)$. Aplicando limites a ambos os membros da igualdade, visto que tratarem de sucessões convergentes e $\frac{1}{2^n} \to 0$, tem-se

$$\lim f(n+1) = \lim \frac{f(n)}{2^n} \Leftrightarrow L = 0$$

7ª Ficha de problemas

Primitivação

---

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando os domínios correspondentes:

$$a)\ \frac{2}{\sqrt{x}} \quad , \quad b)\ \frac{x\sqrt{x}}{2} \quad , \quad c)\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad , \quad d)\ \frac{2}{1-2x}$$

$$e)\ \frac{1}{4+x^2} \quad , \quad f)\ \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x \quad , \quad g)\ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 2x} \quad , \quad h)\ (\frac{1}{2x-1})^2$$

$$i)\ \operatorname{cotg} x \quad , \quad j)\ \operatorname{tg}^5 x \quad , \quad k)\ \frac{x+1}{x^2+1} \quad , \quad l)\ \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}$$

$$m)\ \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{x^2+1} \quad , \quad n)\ \frac{x^2}{x^2+2} \quad , \quad o)\ \frac{2x^4-3x^2+1}{3x^2} \quad , \quad q)\ \frac{2x+3}{2x+1} \quad ,$$

$$r)\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad , \quad s)\ \frac{4x}{x^4+1} \quad , \quad t)\ \frac{1}{x\ln x^2} \quad , \quad u)\ x\sqrt{1+x^2}$$

$$v)\ \frac{e^x}{1+e^x} \quad , \quad x)\ e^{\cos^2 x}\operatorname{sen} 2x \quad , \quad y)\ \frac{e^x}{4+e^{2x}} \quad , \quad z)\ \frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$$

2. Determine a função f que verifica as seguintes condições: $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, $f(e+1) = 0$ e $f'(0) = 0$

3. Usando o método de primitivação por partes, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando os domínios correspondentes:

$$a)\ x\cos 2x \quad , \quad b)\ \ln 2x \quad , \quad c)\ \operatorname{arctg} x \quad , \quad d)\ x^3 \operatorname{ch} x$$

$$e)\ \operatorname{arcsen}^2 x \quad , \quad f)\ x\cos x \operatorname{sen} x \quad , \quad g)\ (\frac{1}{x^2+1})^2 \quad , \quad h)\ \cos(\ln x)$$

$$i)\ x^2\ln x \quad , \quad j)\ x^2 e^{2x} \quad , \quad k)\ \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} \quad , \quad l)\ 2x\operatorname{arctg} x$$

8ª Ficha de problemas

Integral de Riemann

---

1. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad , \quad b) \int_{e^1}^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx \quad , \quad c) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \operatorname{cotg}(x^2) dx \quad ,$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 x e^{2x} dx \quad , \quad b) \int_0^1 \operatorname{arctg}(x) dx \quad , \quad c) \int_1^e \ln^2(x) dx \quad ,$$

3. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{x^2-1} dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{x+1}{x^3+2x^2} dx \quad , \quad c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x^3-1} dx \quad , \quad d) \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \quad ,$$

4. Justifique a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule as respectivas derivadas.

$$a) \int_x^0 e^{4t^2} dt \quad , \quad b) \int_0^{\cos x} e^{t^2+2x} dt \quad , \quad c) \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

5. Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln(t) dt.$$

a) Calcule $\varphi(2)$.

b) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $\varphi'(x)$, para $x > 0$.

c) Estude φ quanto à monotonia e verifique que existe um e um só ponto $c > 0$ tal que $\varphi(c) = 0$.

10ª Ficha de problemas

Integral de Riemann e aplicações

---

1. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+2}{8+\sqrt{(x+1)^3}}dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{1}{e^{2x}-1}dx \quad , \quad c) \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 3\ln x + 2)}dx \quad ,$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx \quad , \quad b) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2}dx \quad , \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}dx \quad ,$$

3. Determine as áreas das regiões planas de $\mathbb{R}^2$ limitadas pelas curvas

   i) $y = \ln x$, $y = 1 - x$, $y = 1$.

   ii) $y = x^2 - \pi^2/4$, $y = \cos x$.

4. Determine a área dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

   i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \pi/2 \wedge 0 \leq y \leq x\cos x\}$.

   ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq [(x+3)\sqrt{x+2}]^{-1}\}$.

Exercícios resolvidos

Determine o valor dos integrais

i)
$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

ii)
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

iii)
$$\int_1^e x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

iv)
$$\int_0^1 2x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Resolução.

i) Dado que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, a função integranda é imediatamente primitivável e, usando a fórmula de Barrow, tem-se

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 \, dx = \left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

ii) Através da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \left[\frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{12}$$

iii) Usando o método da integração por partes e fazendo $u' = x$ e $v = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ vem $u = \frac{x^2}{2}$, $v' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$ e

$$\int_1^e x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{-1}{x(x+1)} \, dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} \ln \frac{e+1}{e} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x}{x+1} \, dx$$

Efectuando a divisão inteira entre os polinómios da última fracção vem $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ logo

$$\int_1^e x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2}{2}\ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^e 1 - \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{e}{2} - \frac{\ln(e+1)}{2}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left((e^2-1)\ln(e+1) - e^2 + e - 1\right).$$

iv) Usando o método de integração por partes e fazendo $u' = 2x$ e $v = \operatorname{arctg} x$ vem $u = x^2$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$ e

$$\int_0^1 2x \operatorname{arctg} x\, dx = \left[x^2 \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

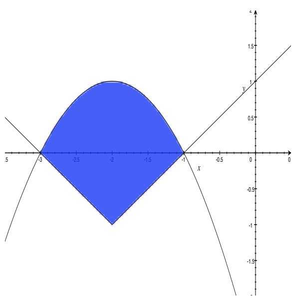
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \left[-x + \operatorname{arctg} x\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} + (-1 + \operatorname{arctg} 1) - (\operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Determine a área da região limitada pelas linhas, definidas por:

$$y = -x^2 - 4x - 3\,, \quad y + 1 = |x+2|$$

Resolução.



Para $x > -2$, $|x+2| = x+2$ e $-x^2 - 4x - 3 = (x+2) - 1 \Leftrightarrow x = -1$, logo as linhas intersetam-se em $(-1, 0)$. Sendo a região acima representada simétrica relativamente a $x = -2$, a sua área é obtida por:

$$2\int_{-2}^{-1} \left(-x^2-4x-3\right) - [(x+2)-1]\, dx = 2\int_{-2}^{-1} -x^2-5x+2\, dx =$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1} = \frac{43}{3}$$

Determine o valor dos integrais:

$$(i)\ \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\, dx \qquad (ii)\ \int_1^2 \frac{x^2-x}{x^3+3x^2+2x}\, dx$$

Resolução. (i) Determine-se uma primitiva, usando o método de primitivação por partes e a primitivação por decomposição

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{3}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2x}{3}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^2}{3}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(\sqrt{1+x^2})^{\frac{5}{2}}$$

pela fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\, dx = \left[x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

(ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em fracções simples

$$\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^3+3x^2+2x}\, dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\, dx = A\int_1^2 \frac{1}{x+1}\, dx + B\int_1^2 \frac{1}{(x+2)}\, dx =$$

$$= A[\ln(x+1)]_0^1 + B[\ln(x+2)]_1^2.$$

A determinação das constantes A, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

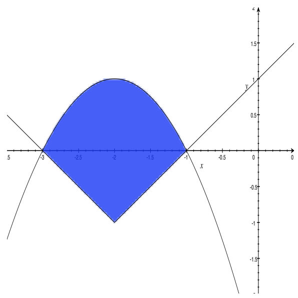
$$x-1 = (A+B)x + (2A+B)$$

Tem-se $A=-2,\ B=3$ concluindo-se que:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\, dx = \ln(\frac{25}{24}).$$

Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \operatorname{sh} x, \qquad y = 0 \qquad \text{e} \quad x = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$



Resolução. As linhas $y = 0$, $y = \operatorname{sh} x$ intersetam-se em $(0,0)$. Sendo a área da região obtida por:

$$\int_0^{\frac{e-e^{-1}}{2}} \operatorname{sh} x \, dx = [\operatorname{ch} x]_0^{\operatorname{sh} 1} = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} 1) - 1 \ .$$

Seja $\phi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(x) = \int_1^{\ln x} x e^{t^2} \, dt \, .$$

i) Defina, se existirem, as funções ϕ' e ϕ''.

ii) Determine

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x} + \lim_{x \to e} \frac{\phi(x)}{x - e}$$

Resolução.

i) A função $F(x) := \int_1^x e^{t^2} \, dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $\mathbb{R}$ e portanto diferenciável em $\mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como $\phi(x) = x \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt = xF(\ln x)$ é resulta da composição e produto de funções diferenciáveis em $[1, +\infty[$ será também diferenciável em $[1, +\infty[$. A sua derivada é dada por:

$$\phi'(x) = x(\ln x)' e^{(\ln^2 x)} + \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt = e^{(\ln^2 x)} + \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt,$$

pela regra da derivada do produto e pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Por sua vez, ϕ' é a soma de duas funções diferenciáveis em $[1,+\infty[$ e portanto diferenciável em $[1,+\infty[$ tendo-se:

$$\phi''(x) = \frac{2\ln x\, e^{(\ln^2 x)}}{x} + \frac{e^{(\ln^2 x)}}{x} = \frac{e^{(\ln^2 x)}}{x}(2\ln x + 1).$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\ln x} = 0^0 \ \text{(indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \ \text{(ind.)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1-\cos x))'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to +\infty} (1+\cos x)\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 2.1$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (1+\cos x)\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to +\infty} (1+\cos x)\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 2.1$$

Tem-se, finalmente, que $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\ln x} = e^2$.

$$\lim_{x\to e} \frac{\phi(x)}{x-e} = \frac{\int_1^1 e\cos(t^2)\, dt}{0} = \frac{0}{0} \ \text{(ind.)}$$

Da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to e} \frac{\phi(x)}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\phi'(x)}{(x-e)'} = \lim_{e^{(\ln^2 x)} + \int_1^{\ln x} e^{t^2}\, dt} 1 = e$$

Assim $\lim_{x\to e} \dfrac{\phi(x)}{x-e} + \lim_{x\to +\infty} x^{2/\sqrt{x}} = \cos 1 + 1$.

i) Determine, utilizando a mudança de variável $\sqrt{x} = t$, o integral

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx\,.$$

ii) Indique uma solução da equação

$$(h(x))^2 = 2\int_0^x h(t)\, dt + \int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx\,.$$

em que $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que não se anula em $]0,1[$.

Resolução.

i) Aplicando o método de integração por substituição,
$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = \varphi(t) = t^2$

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx \;= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t.2t\, dt =$$

integrando por partes,

$$= 2\left([-t.\cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt \right) = 2\,[\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = 2$$

ii) Tem-se

$$2h(x)h'(x) = 2h(x) \;\Leftrightarrow\; 2h(x)\,(h'(x) - 1) = 0$$

Como de $h'(x) - 1 = 0$, deduz-se que $h(x) = x + C$,

$$(x + C)^2 = 2\int_0^x (t + C)dt + 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2Cx + C^2 = \left[t^2/2 + Ct\right]_0^x + 2$$

donde $C = \sqrt{2}$.

11ª Ficha de problemas

Séries numéricas

---

1. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2+\cos(n\pi)} \quad , \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}} \quad ,$$

2. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-e}{e^n} \quad , \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{3^n n!} \quad , \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}(\frac{1}{n^2}) \quad ,$$

3. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{(n-1)}}{5^n} \quad , \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n} \quad , \quad c)\sum_{n=1}^{+\infty}n\operatorname{sen}(\frac{1}{n}) \quad ,$$

4. Sendo $a_n > 0$ e $a_n \to +\infty$, estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n} \quad , \quad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n+a_n}$$

5. Sendo $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ convergente, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$$

é também convergente.

12^{a} Ficha de problemas

Séries numéricas e séries de potências

---

1. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Determine a sua soma.

2. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes. Verifique se a convergência é absoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n^4}{e^n+n^3}$$

3. Determine o maior intervalo aberto onde são convergentes as séries

$$i)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\, x^n \quad , \quad ii)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3x)^{2n}}{5^n(n+1)}$$

4. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-n)}(x+1)^{n+2}, \ \ x \in \mathbb{R}$

   a) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$, onde a convergência da série é absoluta

   b) Determine a soma da série quando $x = 0$.

Exercícios resolvidos

Analise a natureza das séries numéricas e em caso de convergência determine a soma de uma delas.

$$i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}} \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{6^{n+1}} \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Resolução.

i) As sucessões $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}$ e $b_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ têm o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Uma vez que

$$\lim \frac{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}$$

é uma série divergente pelo critério de comparação, já que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série divergente, pois é uma série de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$.

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{6^{n+1}} = 1/6 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$$

é uma série geométrica de termos positivos convergente uma vez que tem razão, $2/3$, de módulo inferior a um. O valor da sua soma é :

$$1/6 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n = 1/6 \frac{2/3}{1-2/3} = \frac{1}{3}$$

iii) Do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} . \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim \frac{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})^2} = 4 > 1\,,$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ é divergente.

Determine $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} = 3.$$

Resolução. A série é uma série geométrica convergente de razão $\frac{3}{4}$,

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} = \frac{4}{3}\sum_{n=a}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{3}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^a}{1-\frac{3}{4}}.$$

donde

$$\frac{16}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^a = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^a = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

resultando $a = 2$.

(i) Analise a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^{3/2}+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\pi/2)3^{n+1}}{\pi^n}$$

(ii) Determine um número real que seja majorante do módulo da soma de uma das séries anteriores.

Resolução.

i) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{3+\sqrt{n}}{n+1}$ e $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Tem-se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{3}{\sqrt{n}}+1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1/2 < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sqrt{n}}{n+1}$ é também divergente.

A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n}\right| = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

é uma série geométrica convergente de razão $\dfrac{2}{e} < 1$, sendo a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n}$ consequentemente absolutamente convergente.

ii)

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n}\right| \leq 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{2e}{e-2}$$

(i) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)(n+2)}$$

é absolutamente convergente.

(ii) Indique a soma da série em $x = 1$.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n+2}{n+3}} = \lim \frac{n+3}{n+1} = 1$$

Assim série converge absolutamente se $|x-2| < 1$ i.e $1 < x < 3$.
Para $x = -3$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

é uma série de Mengoli convergente, pois a sucessão $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ é convergente.
Para $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right|$$

é uma série absolutamente convergente.

ii) Sendo uma série de Mengoli convergente a sua soma é $1/2$, uma vez que, considerando a sucessão das somas parciais S_m, tem-se

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \left(1/2 - \frac{1}{m+2}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$$

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos divergente e $s_n = b_1 + \ldots + b_n$ a sua sucessão das somas parciais. Conclua, justificando, qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{s_n^2}$$

Sugestão: Mostre que $\dfrac{b_n}{s_n^2} \leq \dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n}$

Resolução. Tem-se

$$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{b_n}{s_n s_{n-1}}$$

Como $s_n s_{n-1} \leq s_n^2$ já que $b_n > 0$. Assim $\dfrac{b_n}{s_n^2} \leq \dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{b_n}{s_n^2}$ é uma série de Mengoli convergente, pois tem-se $v_n = \dfrac{1}{s_n} \to 0$. Consequentemente pelo critério geral de comparação, conclui-se que a série dada é convergente.