

Cálculo Diferencial e Integral I

10ª Ficha de problemas

Integral de Riemann e aplicações

1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\int_0^{x^2} \operatorname{sh}(t) dt}$$

2. Verifique que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável tal que $f(a+b-x) = f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$.
Verifique que:

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

4. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

Mostre que F é uma função ímpar.

5. Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_0^{\log x} x e^{t^2} dt - x.$$

Verifique que f tem um mínimo em 1.