Cálculo Diferencial e Integral I

4ª Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Continuidade e limites.

---

1. Considere a função $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

   a) Calcule

$$\lim_{x \to -1} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} f(x)$$

   b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou mínorada e se tem máximo ou mínimo em $]-1, 1[$.

   c) Se x_n for uma sucessão com termos em $]-1, 1[$, convergente para 1, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.

   d) Dê um exemplo de uma sucessão y_n, de termos em $]-1, 1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

2. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x \to 0}(1 - x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) = 1$

3. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1,

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ \operatorname{arcsen}(x) & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 \quad \text{se} \quad x \leq -1. \end{cases}$$

   a) Determine a.

   b) Determine $f(\frac{4}{\pi} \arccos(-\frac{4}{5}))$ e $f(\cos(\frac{5\pi}{12}))$.

   c) Estude a função f do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função f. Indique ainda se a função tem no domínio máximo, mínimo, supremo ou ínfimo e, no caso de existência, indique o valor.

   d) Diga se existem e, no caso de existência, calcule os limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

4. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, uma função contínua, justifique que:

   a) Não existe qualquer sucessão x_n de termos em $[0,1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = n$.

   b) Se existe uma sucessão x_n de termos em $[0,1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = \frac{1}{n}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

5. Seja $f : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, uma função contínua, verificando a condição $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

   a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1,1]$? Justifique.

   b) Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \operatorname{tg}(f(u_n))$, em que $u_n = \frac{1-n}{n}$.