Cálculo Diferencial e Integral I

5ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade.

---

1. Defina a derivada das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \qquad b)\ g(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}, \qquad c)\ h(x) = x\,\mathrm{sen}(x^2).$$

2. Determine, conhecendo as derivadas das funções tangente e seno, as derivadas das funções:

$$a)\ h_1(x) = \mathrm{arctg}\, x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad b)\ h_2(x) = \mathrm{arcsen}\, x, \quad \forall x \in [-1,1]$$

3. Determine a derivada para cada uma das seguintes funções:

$$a)\ e^{\mathrm{arctg}\, x},\ x \in \mathbb{R} \quad b)\ (\ln x)^x,\ x \in]1,+\infty[\quad c)\ x^{x^{x-1}},\ x \in \mathbb{R}^+$$

4. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \mathrm{arctg}(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $f'(a)$ e $f'(b)$ e escreva equações das tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa a e b.
   b) Justifique que $f'(0) = 1$.
   c) Utilize os resultados de a) e b) para justificar que f não tem extremos locais.

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \forall x \neq 0$$

   Determine as derivadas laterais de f no ponto 0.

6. Seja a função definida por $y = \sqrt{\mathrm{ch}\, x - 1}$. Indique para a função referida o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada.
   Determine as derivadas laterais em 0.

7. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada das funções:

$$a)\ \ln(x \operatorname{sh} x); \qquad b)\ \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x); \qquad c)\ \frac{e^x}{1+x}; \qquad d)\ \ln(\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{x-1}))$$

8. Sejam a, b reais e f uma função contínua em $[a, b]$ duas vezes diferenciável em $]a, b[$. Suponha que o gráfico de f e o segmento de recta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ se intersectam um ponto $(x_0, f(x_0))$ com x_0 pertencente a $]a, b[$. Mostre que existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.