Cálculo Diferencial e Integral I

6ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade

---

1. Determine os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x} \quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x} \quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad d)\ \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$$

2. Calcule

$$a)\ \lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} \quad b)\ \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2 e^{\ln^2 x}} \quad d)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{ch} x)^{\coth x}$$

3. Seja $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) + 1$
   a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x.
   b) Determine um majorante para o erro que se comete em $[-1/2, 1/2]$ ao aproximar f pelo polinómio indicado em a).

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais em α e β, com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.
   Escreva a fórmula de Taylor para g e com resto de Lagrange de segunda ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{1-x^2}$
   a) Estude a função f do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.
   b) Complete o estudo da função f, considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões e assíntotas. Esboce o gráfico da função f.