Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2001/2002

2º Teste e 1º Exame - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

21 de Junho de 2002

Exame: resolva <u>todas</u> as questões. Duração do exame: 3 h
Teste: resolva <u>apenas</u> as questões 6 a 9. Duração do teste: 90 min
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2 val.) **1.** Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira dada por

$$f(x+iy) = x^2 + \alpha(y) + i(2y-1)\beta(x)$$

onde α e β são funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine estas duas funções explicitamente, de modo a que seja satisfeita a condição $f(0) = 1$.

Resolução: Como f é uma função inteira, as suas partes real e imaginária são infintamente diferenciáveis e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todos os pontos $z = x + iy$ do plano complexo. Assim, escrevendo

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)) = x^2 + \alpha(y) \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)) = (2y-1)\beta(x)$$

tem-se que, necessariamente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = 2\beta(x) \\ \alpha'(y) = (1-2y)\beta'(x). \end{cases}$$

Da primeira equação conclui-se imediatamente que

$$\beta(x) = x$$

e substituindo na segunda equação, que $\beta'(x) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha'(y) &= 1 - 2y \\ \Rightarrow \alpha(y) &= y - y^2 + c, \qquad \text{com} \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A constante c pode ser finalmente determinada utilizando a condição dada

$$f(0) = c = 1.$$

(2 val.) **2.** Considere a função $f:\mathbb{C}\backslash\{0,1\}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}.$$

Determine o maior valor de $R>0$ e a correspondente sucessão $\{c_n\}$ tal que f pode ser representada pela série

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{c_n}{z^n}\quad \text{para todo}\quad 0<|z|<R.$$

Resolução: Tem-se no aberto $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{z+1}{z(z-1)}=\frac{z+1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}=\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{-1}{1-z}\\
&=\left(1+\frac{1}{z}\right)\cdot(-1)\sum_{n=0}^{\infty}z^n\\
&=-1\left(1+z+z^2+\cdots\right)-\left(z^{-1}+1+z+z^2+\cdots\right)\\
&=-\frac{1}{z}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n.
\end{aligned}$$

Logo $R=1$, $c_n=0$ para $n>1$, $c_1=-1$ e $c_n=-2$ para $n\le 0$.

(2,5 val.) **3.** Calcule o seguinte integral, por aplicação conveniente do teorema dos resíduos

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}\ .$$

Resolução: Dado que a função integranda é par e periódica de período 2π, temos

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}.$$

Para determinar este integral, considera-se a circunferência unitária $|z|=1$, parametrizada de acordo com $z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. Temos então $dz=ie^{i\theta}d\theta$ e

$$\oint_{|z|=1}f(z)dz=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2(5+3\cos\theta)^2}.$$

Dado que $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+(e^{i\theta})^{-1})$, podemos escrever

$$f(e^{i\theta})=\frac{1}{2ie^{i\theta}\left(5+\frac{3}{2}(e^{i\theta}+(e^{i\theta})^{-1})\right)^2},$$

de onde se determina $f(z)$

$$f(z)=\frac{2z}{4iz^2\left(5+\frac{3}{2}(z+z^{-1})\right)^2}=\frac{2z}{i\left(10z+3z^2+3\right)^2}=\frac{2z}{9i\left(z+3\right)^2\left(z+\frac{1}{3}\right)^2}.$$

Esta função tem singularidades isoladas somente nos pontos $z_1 = -3$ e $z_2 = -\frac{1}{3}$. Como apenas o ponto $z_2 = -\frac{1}{3}$ se encontra dentro da circunferência unitária, vamos classificar esta singularidade, de forma a aplicar o teorema dos resíduos. Dado que

$$f(z)(z+\tfrac{1}{3})^2 = \frac{2z}{9i\,(z+3)^2}$$

é uma função diferenciável numa vizinhança de $-\frac{1}{3}$, este é um polo duplo, assim

$$\text{Res}(f,-\tfrac{1}{3}) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{9i\,(z+3)^2}\right)\Big|_{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9i}\frac{3-z}{(z+3)^3}\Big|_{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{128i}$$

Finalmente, pelo teorema dos resíduos, obtemos

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} = \oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \frac{5}{128i} = \frac{5}{64}\pi.$$

(2 val.) **4.** Determine a solução da equação diferencial ordinária

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \qquad t > 0,$$

que satisfaz a condição inicial $y(\pi) = 0$.

Resolução: Trata-se de uma equação linear de primeira ordem. Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\log t} = t^2 \quad , \quad t > 0$$

a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = t\sin t$$

pelo que

$$t^2 y = \int t\sin t\; dt + C = -t\cos t + \sin t + C$$

e, para $t > 0$, a solução da equação diferencial é

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2}$$

Usando a condição inicial $y(\pi) = 0$, obtém-se $C = -\pi$, e a solução do problema de valor inicial é dada por

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\pi}{t^2}$$

(1,5 val.) **5.** Seja $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Mostre que se $|f|$ é constante então f também é constante.

Resolução: A condição $|f| = \text{const.}$ significa que

$$|f(z)| = \sqrt{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2} = \text{const.}$$

ou, o que é equivalente,

$$|f(z)|^2 = (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = \text{const.},$$

para todo o $z = x + i\,y \in B_1(0)$. Mas isto não significa necessariamente que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sejam constantes, que é o que queremos concluír (veja, por exemplo, a função $f(x+iy) = x + i\sqrt{1-x^2}$, que satisfaz $|f| = \text{const.}$ mas que não é constante). O que se pede para mostrar é que, no caso da função ser holomorfa (que obviamente o contra-exemplo anterior não é) quando o módulo da função é constante, a própria função também o será. Note também que não pode usar aqui o Teorema de Liouville, visto que este só é aplicável a funções definidas e diferenciáveis em todo o $\mathbb{C}$, o que não é aqui o caso.

A demonstração deste resultado segue então o seguinte raciocíneo. Se $|f(z)| = 0$, então

$$(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = 0$$

e não há obviamente outra hipótese, que não seja ter-se aqui

$$u(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = 0,$$

donde se conclui que neste caso $f = 0$, e é portanto constante.

Excluíndo agora o caso da constante ser 0, suponha-se então que $|f| = \text{const.} \neq 0$. Derivando a equação

$$(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = \text{const.}$$

primeiro em ordem a x e depois em ordem a y chega-se ao sistema

$$\begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Usando agora o facto de que a função é holomorfa, aplicam-se as condições de Cauchy-Riemann para, neste sistema, substituir as derivadas de v por derivadas de u

$$\begin{cases} 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz deste sistema é $u^2 + v^2$ que, por hipótese é constante e diferente de zero. Conclui-se assim que a única solução é

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

o que, no círculo de raio 1 centrado na origem implica que a função $u(x,y)$ é constante. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, conclui-se que as derivadas parciais de v também são zero, e portanto $v(x,y)$ é igualmente constante.

(2,5 val.) **6.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$t+ye^{2ty}+\alpha te^{2ty}\frac{dy}{dt}=0 \quad , \quad y(1)=0$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Sem resolver a equação, mostre que o problema admite solução única definida numa vizinhança de $t=1$.

b) Determine o valor de α para o qual a equação é exacta. Para esse valor, resolva o problema e indique o intervalo máximo de solução.

Resolução:

a) Uma vez que $\alpha \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y), \quad \text{onde} \quad f(t,y)=\frac{t+ye^{2ty}}{\alpha te^{2ty}}.$$

A função $f(t,y)$ é de classe C^∞ no conjunto $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(t,y):t=0\}$. Assim, neste conjunto, f é localmente Lipschitziana em relação a y, o que garante, pelo teorema de Picard-Lindelöf, que numa vizinhança de $t=1$, existe uma única solução para o problema de valor inicial com $y(1)=0$ (pois o ponto $(1,0)$ está em A.)

b) A equação pode ser escrita na forma

$$M(t,y)+N(t,y)\frac{dy}{dt}=0$$

com

$$M(t,y)=t+ye^{2ty}, \quad N(t,y)=\alpha te^{2ty}.$$

Por definição, a equação é exacta se

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow e^{2ty}+2tye^{2ty}=\alpha(e^{2ty}+2tye^{2ty}),$$

o que implica que $\alpha=1$. Neste caso, temos $N(t,y)=te^{2ty}$. Os potenciais para esta equação verificam

$$\begin{aligned}\phi(t,y) &= \int M(t,y)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{e^{2ty}}{2}+g(y)\\ \phi(t,y) &= \int N(t,y)dy=\frac{e^{2ty}}{2}+h(t).\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, vemos que os potenciais são da forma

$$\phi(t,y)=\int M(t,y)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{e^{2ty}}{2}+C,$$

para uma constante $C\in\mathbb{R}$. Assim, a solução geral da equa ção na forma implícita é

$$\frac{t^2}{2}+\frac{e^{2ty}}{2}+C=0.$$

Com $t=1,\ y=0$, temos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+C=0 \Leftrightarrow C=-1,$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\frac{t^2}{2}+\frac{e^{2ty}}{2}=1 \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{2t}\log\left(2-t^2\right).$$

Esta solução está definida para $t\neq 0$ e $2-t^2>0$. O intervalo de definição (contendo $t=1$) é portanto, $]0,\sqrt{2}[$.

(3 val.) **7.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=-x+1 \end{cases}$$

a) Determine a solução geral do sistema homogéneo associado.

b) Determine a solução do sistema indicado, que satisfaz a condição $x(0)=y(0)=0$.

Resolução:

(*Primeira alternativa*) Tem-se $x''=2x'+y'$. Logo $x''=2x'+(-x+1)$ e obtém-se a equação de segunda ordem

$$x''-2x'+x=1. \tag{1}$$

a) A equação homogénea correspondente é $x''-2x+x=0$. O polinómio característico é $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$. Logo a solução geral é $x(t)=(a+bt)\,e^t$, onde a e b são constantes. Como $y=x'-2x$ tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= (a+bt)\,e^t+be^t-2\,(a+bt)\,e^t \\ &= be^t-(a+bt)\,e^t. \end{aligned}$$

Portanto a solução geral do sistema homogéneo é

$$x(t)=ae^t+bte^t \tag{2}$$
$$y(t)=-ae^t+b(1-t)e^t. \tag{3}$$

b) Como $x(t)=1$ é uma solução da equção (1) a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^t+bte^t+1 \\ y(t) &= -ae^t+b(1-t)e^t-2. \end{aligned}$$

(*Segunda alternativa*) A solução matricial obtém-se da seguinte maneira. Começa-se por escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Logo, o sistema homogenéo associado é $\binom{x}{y}' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \binom{x}{y}$. O polinómio característico da matrix é $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$. Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. A matriz

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tem nulidade 1; portanto o subespaço gerado pelos vectores próprios de A tem dimensão 1 e A é semelhante à matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $(A-I)^2$ é a matriz nula, para determinar um vector próprio generalizado basta encontrar um vector v tal que $(A-I)\mathrm{v} \neq 0$. Por exemplo $\mathrm{v} = \binom{1}{0}$. Segue-se que

$$(A-I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

é uma vector próprio e a solução geral da equação homogénea associada à equação (4) é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + d\left[t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^t, \tag{5}$$

onde c e d são constantes. Nota-se que para $c = a - b$ e $d = b$, a equação matricial (5) é igual às equações (2) e (3).

Para obter uma solução particular da equação (4) basta determinar uma solução da equação $A\binom{x}{y} + \binom{0}{1} = \binom{0}{0}$. Tem-se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Logo a solução geral é

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^t + d(t+1)e^t + 1 \\ y(t) &= -ce^t - dte^t - 2. \end{aligned}$$

Para satisfazer as condições $x(0) = y(0) = 0$ é fácil ver que as constantes terão que ser $c = -2$ e $d = 1$ donde a solução deste problema de Cauchy é

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^t + te^t + 1 \\ y(t) &= 2e^t - te^t - 2. \end{aligned}$$

(3 val.) **8.** Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0.$$

a) Determine uma solução estacionária (que não depende do tempo) $u_e(x)$, desta equação, satisfazendo as condições de fronteira $u_e(0) = 1$, $u_e(\pi/2) = 0$.

b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira (não estacionário), para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t,0)=1 & t>0, \quad x=0 \\ u(t,\pi/2)=0 & t>0, \quad x=\frac{\pi}{2} \\ u(0,x)=2\cos x & t=0, \quad 0\leq x\leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(**Sugestão:** Escreva a solução na forma $u=v+u_e$ e resolva o problema para v, utilizando a alínea anterior para estabelecer as novas condições inicial e de fronteira).

Resolução:

a) Uma solução estacionária verificará a equação diferencial ordinária

$$u_e''(x)+u_e=0$$

O polinómio característico associado é R^2+1, que tem como raízes $\pm i$, pelo que a solução geral é

$$u_e(x)=A\cos x+B\sin x$$

Pelas condições de fronteira, conclui-se que $A=1$ e $B=0$, e como tal

$$u_e(x)=\cos x.$$

b) Como sugerido, considere-se

$$u(t,x)=u_e(x)+v(t,x)$$

onde $u_e(x)=\cos x$, determinada em a), e $v(t,x)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-v=0 \\ v(t,0)=0\ ,\ v(t,\frac{\pi}{2})=0 \\ v(0,x)=u(0,x)-u_e(x)=\cos x \end{cases}$$

Para determinar $v(t,x)$, usaremos o método da separação de variáveis, isto é, procura-se soluções não nulas da forma $v(t,x)=T(t)X(x)$. Derivando em ordem a t e a x, substituindo na equação e dividindo por XT, obtem-se

$$\frac{T'(t)}{T(t)}-1=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t, e o segundo é uma função de x, a igualdade só se verificará se existir uma constante λ para a qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)}-1=\lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira $v(t,0)=v(t.\frac{\pi}{2})=0$, e atendendo a que $T(t)$ não pode ser a função identicamente nula, obtem-se $X(0)=X(\frac{\pi}{2})=0$. Tem-se então que X é a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=X(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

Para que X não seja identicamente nula, teremos que considerar $\lambda < 0$. Nesse caso

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

e para que as condições de fronteira sejam verificadas

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mais uma vez para que $X(x) \not\equiv 0$, há que verificar-se $\lambda = -4n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$X_n(x) = B_n \sin(2nx)$$

e a solução da equação diferencial $\frac{T'(t)}{T(t)} = 1 - 4n^2$ é

$$T_n(t) = C_n e^{(1-4n^2)t}$$

Tem-se então, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e atendendo à linearidade da derivada, tambem qualquer combinação linear o será, pelo que

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

verifica a equação diferencial parcial e as condições de fronteira. Para determinar os coeficientes A_n teremos que utilizar a condição inicial

$$\cos x = v(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2nx)$$

pelo que se conclui que as constantes A_n são precisamente os coeficientes do desenvolvimento em série de senos da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Visto que f é uma função contínua, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2nx)$$

com

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2nx) dx$$

Usando a igualdade $\sin a \, \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$, tem-se que (também pode calcular o integral de b_n fazendo duas integrações por partes seguidas, ou ainda escrevendo o seno e coseno com recurso a exponenciais complexas)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)x\big)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n-1}\cos\big((2n-1)x\big)\Big|_0^{\pi/2}\Big) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Como consequência

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

e

$$u(t,x) = u_e(x) + v(t,x) = \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx).$$

(1,5 val.) **9.** Designe por

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt$$

a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$. Usando integração por partes, determine uma equação diferencial ordinária, satisfeita por $F(s)$. Obtenha a solução geral dessa equação e, finalmente, use o facto de que

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

para obter a fórmula explícita da transformada de Laplace de $\sqrt{t}$.

Resolução: O integral que define $F(s)$ existe para $s > 0$ e para estes valores de s tem-se

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt.$$

Usamos agora a sugestão dada, e integramos por partes este último integral

$$\int_0^{R} \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\, e^{-st}\Big|_0^R + \frac{2}{3} s \int_0^R t^{\frac{3}{2}}\, e^{-st}\, dt.$$

Fazendo o limite $R \to \infty$, o primeiro termo anula-se e obtemos simplesmente

$$F(s) = \frac{2}{3} s \int_0^{\infty} t\sqrt{t}\, e^{-st}\, dt.$$

Finalmente, usamos a propriedade da transformada de Laplace

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) = \mathcal{L}\big(-t\, f(t)\big)(s)$$

para estabelecer a equação diferencial

$$F(s) = -\frac{2}{3} s \int_0^{\infty} -t\sqrt{t}\, e^{-st}\, dt = -\frac{2}{3} s \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt,$$

ou seja

$$F(s) = -\frac{2}{3} s \frac{dF}{ds}(s), \qquad \text{para} \quad s > 0.$$

A solução geral desta simples equação linear homogénea, de primeira ordem, é

$$F(s) = \frac{C}{s^{3/2}}, \qquad \text{com} \quad C \in \mathbb{R}$$

e a constante C pode ser determinada, notando que

$$C = F(1) = \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Conclui-se portanto que a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$ é dada por

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.$$

(*Outra alternativa*)

É possível também chegar à mesma equação diferencial para $F(s)$, seguindo a outra alternativa de integração por partes. Esta forma é, no entanto, ligeiramente menos directa.

Tal como na resolução acima, integra-se por partes o integral que define a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$, só que agora escolhe-se a outra possibilidade de derivadas (sempre para $s > 0$)

$$\int_0^R \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt = -\frac{\sqrt{t}}{s}\, e^{-st}\Big|_0^R + \frac{1}{2s}\int_0^R \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

No limite $R \to \infty$, o primeiro termo anula-se e obtém-se assim

$$F(s) = \frac{1}{2s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Para construir a equação diferencial ordinária para $F(s)$ deriva-se esta última fórmula

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{ds}(s) &= -\frac{1}{2s^2}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt - \frac{1}{2s}\int_0^\infty \frac{te^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt \\
&= -\frac{1}{s}\left(\frac{1}{2s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\, dt\right) - \frac{1}{2s}\left(\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-st}\, dt\right) \\
&= -\frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{2s}F(s) \\
&= -\frac{3}{2s}F(s).
\end{aligned}$$

E deste modo se chega à equação diferencial, a partir da qual a solução prossegue exactamente como no caso anterior.