Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2001/2002

2º Exame - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

10 de Julho de 2002

Duração do exame: 3 h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y) = \alpha^3 x^3 - \alpha x - 3\alpha x y^2$$

(1 val.) (a) Determine para que valores de α a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(1 val.) (b) Para $\alpha = 1$ determine uma função analítica f tal que $f(1) = 0$ e a parte real de f é u.

Resolução:

(a) Tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\alpha^3 x^2 - \alpha - 3\alpha y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6\alpha x y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\alpha^3 x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6\alpha x$$

Logo u é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2$ se e só se $6\alpha^3 x - 6\alpha x = 6\alpha x(\alpha^2 - 1) = 0$. Portanto $\alpha = 0, 1$ ou -1.

(b) Para $\alpha = 1$ tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 1 - 3y^2$$

Portanto $v(x,y) = 3x^2 y - y - y^3 + \phi(x)$. Como

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

segue-se que $\phi(x)$ é uma constante, e

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^3 - x - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y - y^3 + c\right) \\ f(1) &= u(1,0) + iv(1,0) \\ 0 &= 0 + i(c). \end{aligned}$$

Logo $f(x+iy) = x^3 - x - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y - y^3\right)$ ou seja $f(z) = z^3 - z$.

2. Considere a função $f : \mathbb{C}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \cos z + \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

(1,5 val.) (a) Determine a série de Laurent da função f que converge no aberto $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

(1 val.) (b) Calcule o integral

$$\int_{|z|=3/2} z^2 f(z)\, dz$$

em que a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Começamos por observar que a função f tem apenas duas simgularidades (pólos simples) em $z = 1$ e $z = 2$, devido ao denominador da segunda função somada. Como tal, para conseguir um desenvolvimento em série de Laurent na região anular $1 < |z| < 2$, a série terá necessariamente que ser desenvolvida em torno de $z = 0$.

Tratamos separadamente as duas parcelas da soma que define a função f.

A função $\cos z$ é inteira, ou seja analítica em todo o $\mathbb{C}$, e por isso a sua série de Laurent reduz-se a uma série de Taylor, de raio de convergência infinito, qualquer que seja o ponto escolhido para centrar o desenvolvimento. Em particular, centrando em $z = 0$ tem-se a conhecida fórmula

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Quanto à função $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, fazemos a decomposição

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2},$$

com $A = -1$ e $B = 1$.

A região pedida é a intersecção das duas regiões $|z| > 1$ e $|z| < 2$. Este facto leva-nos a desenvolver a fracção com denominador $z-1$ em $|z| > 1$, e a fracção com denominador $z-2$ em $|z| < 2$. Assim

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1},$$

válido para $|1/z| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$. E a outra fracção

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z/2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

válido para $|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$.

Somando estas três séries obtidas, chegamos à série de Laurent da função f pedida

$$\begin{aligned}
f(z) &= \cos z + \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} + \cdots\right) \\
&= \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2!}\right)z^2 - \frac{z^3}{2^4} - \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{4!}\right)z^4 - \cdots
\end{aligned}$$

que é válida na intersecção das três regiões onde cada uma destas três séries converge, ou seja, em $1 < |z| < 2$.

(b) Do teorema sobre o desenvolvimento em série de Laurent de funções complexas, sabemos que os coeficientes de

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

onde γ é uma qualquer curva fechada, na região anular onde o desenvolvimento em série de Laurent é válido, percorrida uma vez no sentido positivo.

O integral pedido é precisamente um destes coeficientes:

$$\oint_{|z|=3/2} z^2 f(z)\, dz = 2\pi i\; c_{-3}.$$

Observe que no nosso caso $z_0 = 0$ e que a circunferência de raio igual a $3/2$ encontra-se na região do desenvolvimento em série, da alínea (a), $1 < |z| < 2$.

O coeficiente c_{-3} é o da potência $1/z^3$, da alínea (a). Observando então a solução final, da alínea anterior, tem-se $c_{-3} = -1$ e portanto

$$\oint_{|z|=3/2} z^2 f(z)\, dz = -2\pi i.$$

3. Considere a região complexa

$$U_R = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{5}\}$$

em que $R > 1$.

(1,5 val.) (a) Determine

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^5 + 1} dz$$

em que γ_R é a fronteira de U_R, $(R > 1)$, percorrida uma vez no sentido directo.

(1,5 val.) (b) Utilize (a) para determinar o valor do integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^5 + 1}\ .$$

(**Sugestão:** Parametrize cuidadosamente <u>todos</u> os troços de γ_R).

Resolução:

(a) A função $f(z) = (z^5 + 1)^{-1}$ pólos simples nos pontos $z_k = \exp(i \cdot \frac{\pi}{5} + i \cdot k\frac{2\pi}{5})$ para $k = 0, 1, 2, 3$ e 4. Como $z_0 \in U_R$ e $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{C} \setminus U_R$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{z^5 + 1} &= 2\pi i \cdot \mathsf{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z^5 + 1} \\
&= 2\pi i \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z^5 + 1} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{5 z_0^4} \\
&= \frac{2\pi}{5} i e^{-i4\pi/5} = \frac{2\pi}{5} e^{-i3\pi/10}.
\end{aligned}$$

(b) Seja $R > 1$. Então tem-se

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{z^5+1} &= \int_0^R \frac{dx}{x^5+1} + \int_0^{2\pi/5} \frac{iRe^{i\theta}}{R^5e^{i5\theta}+1}\,d\theta + \int_R^0 \frac{e^{i2\pi/5}}{r^5+1}\,dr \\
&= \left(1-e^{i2\pi/5}\right)\int_0^R \frac{dx}{x^5+1} + \int_0^{2\pi/5} \frac{iRe^{i\theta}}{R^5e^{i5\theta}+1}\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{5}e^{-i3\pi/10}
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^5+1} = \frac{1}{1-e^{i2\pi/5}}\cdot\left(\frac{2\pi}{5}e^{-i3\pi/10} - \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi/5} \frac{iRe^{i\theta}}{R^5e^{i5\theta}+1}\,d\theta\right)$$

Como $\left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^5e^{i5\theta}+1}\right| \leq \frac{R}{R^5-1}$ para $R > 1$, segue-se que $\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi/5}\frac{iRe^{i\theta}}{R^5e^{i5\theta}+1}\,d\theta = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{x^5+1} &= \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{1-e^{i2\pi/5}}\cdot\frac{1}{e^{i3\pi/10}} = \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{e^{i3\pi/10}-e^{i7\pi/10}} \\
&= \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{e^{i3\pi/10}+e^{i(-\pi+\frac{7\pi}{10})}} \\
&= \frac{\pi}{5\cos(3\pi/10)}.
\end{aligned}$$

(2 val.) **4.** Determine a solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2+3y^2}{2ty} \qquad t > 0 \text{ e } y < 0,$$

que satisfaz a condição inicial $y(1) = -1$, e indique o intervalo máximo de definição da solução.

(**Sugestão:** Considere a mudança de variável $v = y/t$.)

Resolução:

Utilizando a sugestão, iremos fazer a mudaną de variável $y = tv$. Como tal $y' = (tv)' = v + tv'$, pelo que substituindo na equação diferencial obtem-se

$$v + tv' = \frac{t^2+3t^2v^2}{2t^2v} = \frac{1+3v^2}{2v}$$

que é equivalente a

$$\frac{2v}{1+v^2}v' = \frac{1}{t}$$

Esta é uma equação separável, pelo que

$$\frac{d}{dt}(\log(1+v^2)) = \frac{1}{t}$$

e integrando em t

$$\log(1+v^2) = \log t + c$$

ou seja

$$1 + v^2 = kt$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável, e resolvendo em ordem a y obtem-se

$$y(t) = \pm|t|\sqrt{kt-1}$$

e usando a condição inicial, $y(1) = -1$, conclui-se que a solução do PVI é

$$y(t) = -t\sqrt{2t-1}$$

Para determinar o intervalo máximo de solução I, há que verificar que $1 \in I$, $0 \notin I$, Domínio de y contem I e $y(t) < 0$ para $t \in I$. Atendendo a que o domínio de y é $[1/2, \infty[$ e que nesse intervalo $y(t) \leq 0$, tendo-se $y(t) = 0$ sse $t = 1/2$, podemos concluir que $I =]1/2, \infty[$.

(2,5 val.) **5.** Determine a solução geral da equação diferencial

$$\ddot{y} + y = \frac{1}{\cos t}, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Resolução:

A equação homogénea associada é $y'' + y = 0$, cujo polinómio característico é $\lambda^2 + 1 = 0$. Este polinómio tem como raízes $\lambda = \pm i$, e portanto, a solução geral real da equação homogénea é

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar uma solução particular da equação não homogénea, vamos transformar a equação num sistema de duas equações de ordem 1, isto é, fazer a seguinte mudança de variáveis $x_1 = y$, $x_2 = y'$. A equação dada é então equivalente ao sistema

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Como $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$, são soluções linearmente independentes da equação homogénea, os vectores $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$ são vectores solução, linearmente independentes, da equação homogénea associada ao sistema (1), e portanto, uma matriz fundamental é

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem determinante igual a 1, e portanto a sua inversa é

$$X(t)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a fórmula da variação das constantes, com $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$, $h(t) = [0 \quad \frac{1}{\cos t}]^T$, e c um vector constante, obtemos,

$$\begin{aligned}
x(t) &= X(t)\left(c + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1} h(s)ds\right) = \\
&= X(t)\left(c + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos s} \end{bmatrix} ds\right) = \\
&= X(t)\left(c + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} \frac{-\operatorname{sen} s}{\cos s} \\ 1 \end{bmatrix} ds\right) = \\
&= X(t) \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{-\operatorname{sen} s}{\cos s} ds \\ \tilde{c}_2 + \int_{t_0}^{t} 1 ds \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + \log(|\cos t|) \\ c_2 + t \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} c_1 \cos t + (\cos t)\log(|\cos t|) + c_2 \operatorname{sen} t + t \operatorname{sen} t \\ -c_1 \operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)\log(|\cos t|) + c_2 \cos t + t \cos t \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Finalmente, como $y = x_1$, a solução geral é dada pela primeira componente do vector acima, ou seja

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + (\cos t) \log(|\cos t|) + t \operatorname{sen} t.$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

para $-\pi < x \le \pi$ e tal que $f(x + 2\pi) = f(x)$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

(1 val.) (a) Determine a série de Fourier da função f.

(1 val.) (b) Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular

$$\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Resolução:

(a) A série de Fourier da função 2π−periódica f, é dada por (note que neste caso $L = \pi$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

com os coeficientes dados pelos integrais

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos(nx)\, dx \qquad n \ge 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \operatorname{sen}(nx)\, dx \qquad n > 0.$$

Para a função dada, temos apenas que calcular estes integrais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n\pi}\ sen(nx)\Big|_0^{\pi} = 0 \qquad n > 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{1}{n\pi}\ cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \qquad n > 0. \end{aligned}$$

Os coeficientes b_n claramente anulam-se quando n é par, e portanto a série de Fourier de f é assim dada por

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}((2n+1)x).$$

(b) Se fizermos $x = \pi/2$, na série de Fourier obtida na alínea anterior, facilmente observamos que o argumento do seno serão apenas múltiplos ímpares de $\pi/2$,

$$\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

A série de Fourier fica assim

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

que, aparte do factor $2/\pi$ e do $1/2$ é exactamente o que é pedido na pergunta.

Pelo teorema da convergência de séries de Fourier para funções seccionalmente C^1, sabemos que em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ onde f seja contínua, a série converge para $f(x)$. A função f desta pergunta é, de facto, seccionalmente C^1 porque é constante em $]-\pi, 0[$ e em $]0, \pi[$, pelo que é infintamente diferenciável nestes intervalos e tem limites (óbvios) finitos nos extremos. É também contínua no ponto $x = \pi/2$ onde vale $f(\pi/2) = 1$. Pelo que se tem

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(3 val.) **7.** Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 & t \geq 0, \\ u(t,1) = 0 & t \geq 0, \\ u(0,x) = 2\,\mathsf{sen}(\pi x) & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \mathsf{sen}(4\pi x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Resolução:

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções não nulas, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Derivando em ordem a t e a x e substituindo na equação obtem-se

$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) - T''(t)X''(x) = 0$$

que é equivalente a

$$T''(t)X(x) - X''(x)(T(t) + T''(t)) = 0$$

Dividindo por $X(T + T'')$, obtem-se

$$\frac{T''(t)}{T(t) + T''(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t, e o segundo é uma função de x, a igualdade só se verificará se existir uma constante λ para a qual

$$\frac{T''(t)}{T(t) + T''(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira $u(t,0) = u(t,1) = 0$, e atendendo a que $T(t)$ não pode ser a função identicamente nula, obtem-se $X(0) = X(0) = 0$. Tem-se então que X é a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Para que X não seja identicamente nula, teremos que considerar $\lambda < 0$. Nesse caso

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

e para que as condições de fronteira sejam verificadas

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Mais uma vez para que $X(x) \not\equiv 0$, há que verificar-se $\lambda = -n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x)$$

e $T_n(t)$ será a solução da equação diferencial

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}T_n(t) = 0$$

O polinómio característico associado é

$$R^2 + \frac{n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}$$

que admite as duas raízes $\pm i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2+1}} \equiv \pm i\alpha_n$, e consequentemente

$$T_n(t) = C_n\cos(\alpha_n t) + D_n\sin(\alpha_n t)$$

Tem-se então, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = (A_n\cos(\alpha_n t) + B_n\sin(\alpha_n t))\sin(n\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e atendendo à linearidade da derivada, tambem qualquer combinação linear o será, pelo que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\alpha_n t) + B_n\sin(\alpha_n t))\sin(n\pi x)$$

verifica a equação diferencial parcial e as condições de fronteira. Para determinar os coeficientes A_n e B_n teremos que utilizar as condições iniciais

$$2\sin(\pi x) = u(0,x) \quad \text{e} \quad \sin(4\pi x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$$

Pela primeira condição

$$2\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\pi x)$$

pelo que se conclui imediatamente que

$$A_1 = 2 \quad \text{e} \quad A_n = 0 \text{ para } n > 1$$

tendo-se então que

$$u(t,x) = 2\cos(\sqrt{\frac{\pi^2}{1+\pi^2}}t)\sin(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin(\alpha_n t)\sin(n\pi x)$$

Pela segunda condição (derivando a série em ordem a t termo a termo)

$$\sin(4\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\alpha_n\sin(n\pi x)$$

donde se conclui que

$$B_4\alpha_4 = 1 \quad \text{e} \quad B_n\alpha_n = 0 \text{ para } n \neq 4$$

ou seja

$$B_4 = \sqrt{\frac{1+16\pi^2}{16\pi^2}} \quad \text{e} \quad B_n = 0 \text{ para } n \neq 4$$

tendo-se finalmente que

$$u(t,x) = 2\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{1+\pi^2}}t\right)\sin(\pi x) + \sqrt{\frac{1+16\pi^2}{16\pi^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{16\pi^2}{1+16\pi^2}}t\right)\sin(4\pi x)$$

8. Seja n um inteiro não-negativo, e considere $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ pontos distintos.
(3 val.) Designe por

$$f(z) = (z-z_1)^{-1}(z-z_2)^{-1}\cdots(z-z_n)^{-1} = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{-1}.$$

Mostre que

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathsf{Res}(f,z_j)}{z-z_j}.$$

Resolução:

A função racional

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)},$$

é diferenciável em $\mathbb{C}$, excepto nos zeros do denominador, nos pontos $z_1, \ldots, z_n$. Estas singularidades não são removíveis porque

$$\lim_{z\to z_i} f(z) = \lim_{z\to z_i}\frac{1}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)} = \infty, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Calculemos agora

$$\lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z) = \lim_{z\to z_i}\frac{(z-z_i)}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)} = \lim_{z\to z_i}\frac{1}{\Pi_i(z)} = \frac{1}{\Pi_i(z_i)},$$

onde $\Pi_i(z)$ designa o polinómio de grau $n-1$ obtido multiplicando todos os termos $(z-z_j)$, com j distinto de i. Como

$$\Pi_i(z_i) = (z_i-z_1)\ldots(z_i-z_{i-1})(z_i-z_{i+1})\ldots(z_i-z_n),$$

e todos os pontos z_j são distintos, vemos que $\Pi_i(z_i) \neq 0$, e portanto $f(z)$ tem um polo simples em cada ponto z_i. Assim,

$$\mathsf{Res}(f,z_i) = \frac{1}{\Pi_i(z_i)}.$$

Vamos agora reduzir ao mesmo denominador a soma

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathsf{Res}(f,z_i)}{z-z_i} &= \frac{\frac{1}{\Pi_1(z_1)}}{z-z_1} + \ldots + \frac{\frac{1}{\Pi_n(z_n)}}{z-z_n} = \\
&= \frac{\frac{1}{\Pi_1(z_1)}\Pi_1(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)} + \ldots + \frac{\frac{1}{\Pi_n(z_n)}\Pi_n(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)} = \\
&= \frac{\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_1(z_1)} + \ldots + \frac{\Pi_n(z)}{\Pi_n(z_n)}}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}.
\end{aligned}$$

O numerador desta última fracção é 1. Para mostrá-lo, consideremos o polinómio

$$p(z) = \frac{\Pi_1(z)}{\Pi_1(z_1)} + \ldots + \frac{\Pi_n(z)}{\Pi_n(z_n)} - 1.$$

Sendo a soma de polinómios de grau $n-1$, $p(z)$ é um polinómio de grau $\leq n-1$. Por outro lado, como $\Pi_i(z_j) = 0$, para $i \neq j$, temos

$$p(z_i) = 0, \qquad \text{para todo } i = 1, ..., n,$$

o que implica que podemos escrever $p(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n) q(z)$, sendo $q(z)$ um outro polinómio. Mas como $p(z)$ tem grau $n-1$, só podemos ter $q(z) \equiv p(z) \equiv 0$ e portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{Res}(f, z_i)}{z - z_i} = \frac{1}{(z - z_1) \ldots (z - z_n)}.$$