**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

Última actualização: 3/4/2003

# ANÁLISE MATEMÁTICA IV

## LEEC – PRIMAVERA 2003 – EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

### Equações Lineares Homogéneas

(1) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + e^t y = 0 \ .$$

**Resolução:** *Para* $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\tfrac{dy}{dt} + e^t y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{\dot{y}}{y} = -e^t \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \tfrac{1}{y} dy = -\int e^t dt + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -e^t + c \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(t)| = ke^{-e^t} \qquad \textit{onde } k > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) = ke^{-e^t} \qquad \textit{onde } k \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

*Quando* $y = 0$, *encontra-se que a função* $y(t) = 0$ , $\forall t \in \mathbb{R}$, *também é solução.*
*Solução geral:*

$$y(t) = ke^{-e^t} \qquad \textit{com } k \in \mathbb{R} \ .$$

*Intervalo de definição:* $\mathbb{R}$.
*Verificação:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(ke^{-e^t}) = k(-e^t)e^{-e^t} \ ,$$

*logo*

$$\frac{dy}{dt} + e^t y = k(-e^t)e^{-e^t} + ke^t e^{-e^t} = 0 \qquad \textit{– ok!}$$

□

**Comentário:** *Esta EDO tem uma família infinita de soluções, família essa parametrizada por* $k \in \mathbb{R}$, *ou seja, para cada* $k$ *real tem-se uma solução. Cada solução está definida em toda a recta real.* ♢

(2) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}\ y = 0 \\ y(0) = \sqrt{5}\ . \end{cases}$$

**Resolução:**

*Resolução da EDO: Para* $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}\, y = 0 \iff \frac{\dot{y}}{y} = -\sqrt{1+t^2}$$

$$\iff \ln|y| = -\int \sqrt{1+t^2}\, dt\ .$$

*Cálculo duma primitiva de* $\sqrt{1+t^2}$*: Fazendo a substituição* $t = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \sinh x$*, para a qual* $\frac{dt}{dx} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \cosh x$*, obtém-se*

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2}\, dt &= \int \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 x}}_{\cosh x} \cosh x\, dx \\ &= \int \cosh^2 x\, dx \qquad \textit{a qual se pode primitivar por partes, ficando} \\ &= \sinh x\ \cosh x - \int \underbrace{\sinh^2 x}_{\cosh^2 x - 1}\ dx\ . \end{aligned}$$

*Das duas últimas linhas obtém-se*

$$2\int \cosh^2 x\, dx = \sinh x \cosh x + x + c\ ,$$

*pelo que*

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) + c\ .$$

*Falta escrever esta primitiva em termos de* $t$*:*

$$\begin{aligned} t = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &\iff (e^x)^2 - 2te^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = t + \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

*onde se aplicou a fórmula resolvente para a equação quadrática (*$t - \sqrt{1+t^2}$ *não pode ser solução porque é sempre negativo). Logo,*

$$x = \ln(t + \sqrt{1+t^2})\ .$$

*Por outro lado,*

$$\sinh x = t \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \sqrt{1+t^2}\ .$$

*Finalmente, a primitiva em questão fica*

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2}\, dt &= \tfrac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})) + c \\ &= \tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \ln\sqrt{t + \sqrt{1+t^2}} + c\ . \end{aligned}$$

*Continuação da resolução da EDO: Para $y \neq 0$,*

$$\ln|y| = -\int \sqrt{1+t^2}\,dt = -\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}} + c$$

$$\iff \quad |y(t)| = k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}) \qquad \text{onde } k>0$$

$$\iff \quad y(t) = k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}) \qquad \text{onde } k\neq 0$$

$$\iff \quad y(t) = k\frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}}e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{onde } k\neq 0\ .$$

*Quando $y=0$, encontra-se que a função $y(t)=0$ , $\forall t\in\mathbb{R}$, também é solução.*
*Solução geral:*

$$y(t) = k\frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}}e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{com } k\in\mathbb{R}\ .$$

*Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.*
*Verificação: A condição inicial é verificada*

$$\sqrt{5} = y(0) = ke^0 \qquad \Longrightarrow \qquad k=\sqrt{5}$$

*e a equação também:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(k\exp(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}})\right) \\
&= y(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(-\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} - \ln\sqrt{t+\sqrt{1+t^2}}\right) \\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2} - \tfrac{1}{2}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{2(t+\sqrt{1+t^2})}\right) \\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2(t+\sqrt{1+t^2})+\sqrt{1+t^2}+t}{2\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})}\right) \\
&= y(t)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\underbrace{-\frac{(1+t^2)(t+\sqrt{1+t^2})}{2\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})}}_{-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}}\right) \\
&= -\sqrt{1+t^2}\,y(t) \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

*Solução do problema de valor inicial:*

$$y(t) = \sqrt{\frac{5}{t+\sqrt{1+t^2}}}\ e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{onde } k\in\mathbb{R}\ .$$

□

**Comentário:** *Este problema de valor inicial tem uma única solução definida para todo o $t$ real.* ♢

## Equações Lineares

(3) Resolva o seguinte problema de valor inicial
$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{1+t^2} \ , \qquad y(2) = 3 \ .$$

**Resolução:** *O factor de integração desta EDO linear é $e^t$. Multiplicando por $e^t$ tem-se*

$$e^t \frac{dy}{dt} + e^t y = \frac{e^t}{1+t^2} \iff \frac{d}{dt}(e^t y) = \frac{e^t}{1+t^2}$$

*e integrando entre $2$ e $t$, tem-se*

$$\begin{aligned} & e^t y(t) - e^2 y(2) = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds \\ \iff \quad & y(t) = e^{-t}\left(3e^2 + \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds\right) \\ \iff \quad & y(t) = 3e^{2-t} + e^{-t}\left(\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds\right) \ . \end{aligned}$$

*Solução:*

$$y(t) = 3e^{2-t} + e^{-t}\left(\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds\right) \ .$$

*Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.*
*Verificação: A condição inicial é verificada*

$$y(2) = 3e^0 + e^0\left(\int_2^2 \frac{e^s}{1+s^2} ds\right) = 3 + 0 = 3$$

*e a equação também:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -3e^{2-t} - e^{-t}\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds + e^{-t}\frac{d}{dt}\left(\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds\right) \\ &= -3e^{2-t} - e^{-t}\int_2^t \frac{e^s}{1+s^2} ds + e^{-t}\frac{e^t}{1+t^2} \\ &= -y(t) + \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

$\square$

**Comentário:** *Como nem sempre é possível primitivar uma função em termos de funções elementares, pode acontecer (como no exercício anterior) que a solução duma equação diferencial só possa ser apresentada em termos dum integral indefinido.* $\diamondsuit$

(4) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + h(t)y = t \ , \qquad y(-1) = 2$$

onde $h(t)$ é a função definida por

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *O factor de integração para esta EDO linear é $e^{\int h(t)dt}$. Uma primitiva de $h(t)$ pode obter-se por meio dum integral indefinido, por exemplo:*

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{se } t > 0 \ . \end{cases}$$

*Multiplicando pelo factor de integração, tem-se*

$$e^{H(t)}\frac{dy}{dt} + h(t)e^{H(t)}y = te^{H(t)} \iff \frac{d}{dt}(e^{H(t)}y) = te^{H(t)}$$

*e integrando entre $-1$ e $t$, tem-se*

$$\begin{aligned} & e^{H(t)}y(t) - e^{H(-1)}y(-1) = \int_{-1}^t se^{H(s)}ds \\ \iff \quad & y(t) = e^{-H(t)}\left(2e^0 + \int_{-1}^t se^{H(s)}ds\right) \\ \iff \quad & y(t) = \begin{cases} 2e^{-H(t)} + e^{-H(t)}\left(\int_{-1}^0 se^0 ds + \int_0^t se^{\frac{1}{2}s^2}ds\right) & \text{se } t > 0 \\ 2e^{-H(t)} + e^{-H(t)}\int_{-1}^t se^0 ds & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \\ \iff \quad & y(t) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(-\frac{1}{2} + \left[e^{\frac{1}{2}s^2}\right]_0^t\right) & \text{se } t > 0 \\ 2e^0 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \\ \iff \quad & y(t) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(e^{\frac{1}{2}t^2} - \frac{3}{2}\right) & \text{se } t > 0 \\ 2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \\ \iff \quad & y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 & \text{se } t > 0 \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} & \text{se } t \leq 0 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

*Solução:*

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 & \text{se } t > 0 \\ \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} & \text{se } t \leq 0 \ . \end{cases}$$

*Intervalo de definição:* $\mathbb{R}$.
*Verificação: Primeiro nota-se que*

$$y(-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \ .$$

*Além disso, tem-se, para* $t \neq 0$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t^2} = -ty(t) + t = -h(t)y(t) + t & \text{se } t > 0 \\ \\ t = -0y(t) + t = -h(t)y(t) + t & \text{se } t < 0 \ . \end{cases}$$

*Em* $t = 0$ *ambas as derivadas laterais de* $y(t)$ *são* $0$ *e portanto a equação*

$$\frac{dy}{dt}(0) + h(0)y(0) = 0$$

*é satisfeita.* □

**Comentário:** *Apesar da expressão da solução do problema de valor inicial ter de ser dada por ramos, a função* $y(t)$ *é de classe* $C^1$*. Isto deve-se ao facto de* $H(t)$ *ser de classe* $C^1$ *em* $\mathbb{R}$ *(é uma primitiva da função contínua* $h(t)$*) e à expressão integral para a solução* $y(t)$*.* ♢

(5) Um cardume de salmões vive tranquilamente numa zona costeira. A taxa de natalidade do cardume é de 2 por cento por dia e a taxa de mortalidade é de 1 por cento por dia. Em t=0 o cardume tem 1000 salmões e nesse dia chega à zona um tubarão que se dedica a consumir 15 salmões por dia. Quanto tempo demora o tubarão a extinguir o cardume?

**Resolução:** *Seja* $y(t)$ *a população de salmões no dia* $t$*. A evolução normal da população seria aumentar à taxa de* $2 - 1 = 1$ *por cento por dia. Isto é, a população deveria satisfazer a equação diferencial:*

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y \ .$$

*No entanto, a partir do momento em que o tubarão chega, morrem mais 15 salmões por dia e portanto tem-se*

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y - 15 \ .$$

*Uma vez que no instante* $t = 0$ *há 1000 salmões, para responder à questão do enunciado tem de se resolver para* $t \geq 0$ *o problema de valor inicial:*

$$\frac{dy}{dt} = 0.01y - 15 \ , \qquad y(0) = 1000 \ .$$

*O factor de integração para esta EDO linear é* $e^{-0.01t}$*. Multiplicando pelo factor de integração obtém-se*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-0.01t}y(t)\right) = -15e^{-0.01t}$$

*e integrando entre* $0$ *e* $t$ *tem-se*

$$\begin{aligned} & e^{-0.01t}y(t) - 1000 = \int_0^t -15e^{-0.01s}ds \\ \iff \quad & y(t) = e^{0.01t}\left(1000 - \int_0^t 15e^{-0.01s}ds\right) \\ \iff \quad & y(t) = 1000e^{0.01t} - 15e^{0.01t}\left[-\frac{e^{-0.01s}}{0.01}\right]_0^t \\ \iff \quad & y(t) = 1000e^{0.01t} - 1500(e^{0.01t} - 1) \\ \iff \quad & y(t) = 1500 - 500e^{0.01t} \ . \end{aligned}$$

*Solução:*

$$y(t) = 1500 - 500e^{0.01t} \ .$$

*<u>Intervalo de definição</u>:* $\mathbb{R}$.
*Note-se que, apesar da solução da equação estar definida para $t \in \mathbb{R}$, ela só tem significado físico para $t \geq 0$.*
*<u>Verificação</u>: Primeiro confirma-se que*

$$y(0) = 1500 - 500 = 1000 \ .$$

*Além disso, tem-se*

$$\frac{dy}{dt} = -5e^{0.01t} = 0.01(y - 1500) = 0.01y(t) - 15 \qquad \textit{– ok!}$$

*<u>Resposta ao problema</u>: O cardume estará extinto quando $y(t) = 0$.*

$$\begin{array}{rrcl} & 1500 - 500e^{0.01t} & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & e^{0.01t} & = & 3 \\ \Longleftrightarrow & t & = & 100 \ln 3 \\ \Longrightarrow & t & \simeq & 109.9 \ . \end{array}$$

*Conclui-se que o tubarão leva aproximadamente 110 dias a extinguir o cardume de salmões.*
$\square$

(6) Um resíduo industrial é introduzido num tanque que contém 1000 litros de água a uma taxa de 1 litro por minuto. A mistura é instantaneamente homogeneizada e despejada à mesma taxa de 1 litro por minuto.
(a) Determine a concentração de resíduo no tanque no minuto $t$.
(b) Quanto tempo leva esta concentração a atingir os 20 por cento?

**Resolução:**
(a) *Seja $y(t)$ a quantidade de resíduo no tanque no minuto $t$ em litros. Se o tanque tivesse capacidade ilimitada e não houvesse escoamento, a quantidade de resíduo aumentaria de acordo com a lei*

$$\frac{dy}{dt} = 1 \ .$$

*Como se está a admitir que o resíduo se mistura imediatamente e que o conteúdo do tanque é escoado à mesma taxa em que o tanque é cheio, a taxa de aumento de resíduo será inferior porque uma parte do resíduo se escoará imediatamente. A questão é: que parte? Uma vez que a mistura é homogénea, a proporção de resíduo no litro escoado em cada minuto será idêntica à proporção de resíduo no tanque. Esta proporção é $\frac{y(t)}{1000}$. Assim conclui-se que a quantidade de resíduo que se escoa por minuto é $0.001y(t)$ litros. Donde $y(t)$ obedece à lei dada pela EDO linear:*

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0.001y \ .$$

*Inicialmente, ou seja, no minuto $t = 0$, não há qualquer resíduo no tanque, portanto*

$$y(0) = 0 \ .$$

*Para responder à questão do enunciado tem-se então que resolver, para $t \geq 0$, o problema de valor inicial:*

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0.001y \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

*Para resolver a EDO multiplica-se pelo factor de integração $e^{0.001t}$ obtendo:*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{0.001t}y(t)\right) = e^{0.001t} \ .$$

*Integrando entre* $0$ *e* $t$*, tem-se:*

$$
\begin{aligned}
& e^{0.001t}y(t) - 0 = \int_0^t e^{0.001s} ds \\
\iff \quad & y(t) = e^{-0.001t} \int_0^t e^{0.001s} ds \\
\iff \quad & y(t) = 1000(1 - e^{-0.001t}) \ .
\end{aligned}
$$

*Seja* $c(t)$ *a concentração de resíduo no tanque no minuto* $t$ *em percentagem de volume. Conclui-se que*

$$c(t) = \frac{y(t)}{1000} = 1 - e^{-0.001t} \ .$$

*Solução: A concentração de resíduo no tanque no minuto* $t$ *é*

$$c(t) = 1 - e^{-0.001t} \ .$$

*Intervalo de definição:* $\mathbb{R}$*, mas a solução só tem significado físico para* $t \geq 0$*.*
*Verificação: Uma vez que se resolveu o problema de valor inicial para a quantidade* $y(t)$*, aplica-se a verificação também a* $y(t)$*. Primeiro nota-se que*

$$y(0) = 1000(1 - 1) = 0 \ .$$

*Além disso, tem-se*

$$\frac{dy}{dt} = e^{-0.001t} = -0.001(y - 1000) = -0.001y(t) + 1 \qquad \text{– ok!}$$

(b) *A concentração atinge 20 por cento quando*

$$
\begin{aligned}
& 1 - e^{-0.001t} &=& \ 0.2 \\
\iff \quad & e^{-0.001t} &=& \ 0.8 \\
\iff \quad & t &=& \ -1000 \ln 0.8 \\
\implies \quad & t &\simeq& \ 223.1 \ .
\end{aligned}
$$

*Portanto, a concentração leva aproximadamente 3h e 43m a atingir os 20 por cento.*

$\square$

(7) Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)y^n$$

onde $n > 1$ é um número natural.

(a) Determine a solução geral desta equação.

**Sugestão:** Divida ambos os lados por $y^n$ e transforme a equação numa equação linear fazendo a mudança de variável $u = y^{1-n}$.

(b) Ache a solução geral da seguinte equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + y \sin t + y^3 \sin 2t = 0 \ .$$

## Equações Separáveis

(8) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \; .$$

**Resolução:** *Para* $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = \tfrac{1}{t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \tfrac{dy}{dt} dt = \int \tfrac{1}{t} dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int dy = \ln|t| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \ln|t| + c \; . \end{aligned}$$

*Solução geral:*

$$y(t) = \ln|t| + c \qquad \textit{com } c \in \mathbb{R} \; .$$

*Intervalo de definição:* $]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$.

*Verificação:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln|t| + c) = \frac{1}{t} \quad (\textit{para } t \neq 0) \qquad \textit{– ok!}$$

□

**Comentário:** *A equação dada tem duas famílias infinitas de soluções, cada família parametrizada por* $c \in \mathbb{R}$. *As soluções duma família estão definidas no semi-eixo aberto* $]-\infty, 0[$ *e as soluções da outra família no semi-eixo aberto* $]0, +\infty[$. ♢

(9) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \; .$$

**Resolução:** *Factorizando o segundo membro, e dividindo por* $1 + y^2$ *(que nunca é zero),*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{dy}{dt} = (1-t)(1+y^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{\dot{y}}{1+y^2} = 1 - t \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \tfrac{1}{1+y^2}\, dy = \int (1-t)\, dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \arctan y = t - \tfrac{1}{2}t^2 + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \tan(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c) \\ &\qquad\quad \textit{para } t - \tfrac{1}{2}t^2 + c \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \;, k \in \mathbb{Z} \; . \end{aligned}$$

*Solução geral:*

$$y(t) = \tan(t - \frac{1}{2}t^2 + c) \qquad \textit{com } c \in \mathbb{R} \; .$$

*Intervalo de definição: Os intervalos de definição possíveis são os intervalos máximos contidos no conjunto*

$$\mathbb{R} \setminus \{t \in \mathbb{R} : \; t - \frac{1}{2}t^2 + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;, k \in \mathbb{Z}\} \; .$$

*Verificação:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}[\tan(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \\
&= (1-t)[1 + \tan^2(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \\
1 - t + y^2 - ty^2 &= (1-t)(1+y^2) \\
&= (1-t)[1 + \tan^2(t - \tfrac{1}{2}t^2 + c)] \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

$\square$

**Comentário:** *Os possíveis intervalos de definição da solução foram apenas apresentados implicitamente como intervalos abertos de comprimento máximo contidos no conjunto*

$$\mathbb{R} \setminus \{t : t - \frac{1}{2}t^2 + c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

*Por outras palavras, um intervalo de definição concreto terá por extremos duas soluções consecutivas da equação quadrática*

$$\frac{1}{2}t^2 - t - c + \frac{\pi}{2} + k\pi = 0$$

*com $k$ a variar em $\mathbb{Z}$. Se fosse dada uma condição inicial, escolher-se-ia a constante real $c$ e determinar-se-ia o intervalo que contivesse o instante inicial.*

*Por exemplo, se fosse dada a condição inicial $y(0) = 0$, a constante $c$ teria que satisfazer $0 = y(0) = \tan c$. Escolhendo $c = 0$, o intervalo de definição da solução deste problema de valor inicial seria o intervalo máximo contido no conjunto*

$$\mathbb{R} \setminus \{t : t - \frac{1}{2}t^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\}$$

*que contém o instante $t = 0$. Resolvendo a equação quadrática*

$$t^2 - 2t + \pi + 2k\pi = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{1 - \pi - 2k\pi}$$

*(com $k \in \mathbb{Z}$), obtém-se que as soluções mais próximas de $t = 0$ são*

$$t = 1 - \sqrt{1+\pi} \qquad \text{e} \qquad t = 1 + \sqrt{1+\pi} \ .$$

*Sendo estes os dois instantes mais próximos de $0$ onde a solução explode, conclui-se que o problema de valor inical*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

*tem por solução*

$$y(t) = \tan(t - \frac{1}{2}t^2)$$

*definida para*

$$t \in ]1 - \sqrt{1+\pi}, 1 + \sqrt{1+\pi}[ \ .$$

$\diamondsuit$

(10) Suponha que se tem uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right) ,$$

como, por exemplo, a equação $\frac{dy}{dt} = \sin(\frac{y}{t})$. Estas equações dizem-se *homogéneas*. Como o segundo membro da equação depende apenas do quociente $\frac{y}{t}$, é natural fazer a substituição $v = \frac{y}{t}$, ou seja, $y = vt$.
Mostre que esta substituição transforma $\frac{dy}{dt} = f(\frac{y}{t})$ na equação equivalente

$$t\frac{dv}{dt} + v = f(v) ,$$

a qual é separável.

**Resolução:** *Supõe-se que $t \neq 0$. Se $y(t) = tv(t)$, então*

$$\frac{dy}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v ,$$

*pelo que a equação $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ fica*

$$t\frac{dv}{dt} + v = f(v) ,$$

*que é separável:*

$$\frac{\dot{v}}{f(v) - v} = \frac{1}{t} \qquad \textit{para } f(v) \neq v .$$

□

(11) Determine se cada uma das seguintes funções de $t$ e $y$ pode ser expressa como uma função duma só variável $\frac{y}{t}$:

(a) $\ln y - \ln t + \frac{t+y}{t-y}$ ,

(b) $\frac{y^3+t^3}{yt^2+y^3}$ .

**Resolução:**

(a) *Sim: fundindo os logaritmos e dividindo numerador e denominador da fracção por $t$, fica*

$$\ln y - \ln t + \frac{t+y}{t-y} = \ln\frac{y}{t} + \frac{1+\frac{y}{t}}{1-\frac{y}{t}} .$$

(b) *Sim para $t \neq 0$: dividindo numerador e denominador da fracção por $t^3$, fica*

$$\frac{y^3+t^3}{yt^2+y^3} = \frac{(\frac{y}{t})^3+1}{\frac{y}{t}+(\frac{y}{t})^3} .$$

*Para $t = 0$, a função original vale 1 (ou tem limite 1 quando $y \to 0$), mas a substituição para a variável $\frac{y}{t}$ não é legal.*

□

**Comentário:** *Na alínea* (b), *a resposta estrita é "não". No entanto, pode ser útil saber exprimir a função em termos duma só variável no domínio $t \neq 0$.* ♢

(12) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$t^2\frac{dy}{dt} = 2ty + y^2\ .$$

**Sugestão:** Exercício 10.

**Resolução:** *Para $t \neq 0$, divida-se a equação por $t^2$ e depois aplique-se o exercício 10:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = 2\tfrac{y}{t} + (\tfrac{y}{t})^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad t\tfrac{dv}{dt} + v = 2v + v^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{\dot{v}}{v+v^2} = \tfrac{1}{t} \qquad \textit{para } v + v^2 \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \textstyle\int \tfrac{1}{v+v^2}\,dv = \int \tfrac{1}{t}\,dt + c\ . \end{aligned}$$

*Cálculo duma primitiva de $\frac{1}{v+v^2}$: Decompõe-se $\frac{1}{v+v^2}$ em fracções simples:*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{v(1+v)} = \tfrac{A}{v} + \tfrac{B}{1+v} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 = A + Av + Bv \\ &\Longleftrightarrow \quad A = 1 \quad \textit{and} \quad B = -1\ . \end{aligned}$$

*Logo, uma primitiva de $\frac{1}{v+v^2}$ é*

$$\int \frac{1}{v}\,dv - \int \frac{1}{1+v}\,dv = \ln|v| - \ln|1+v|\ .$$

*Continuação da resolução da EDO:*

$$\begin{aligned} \textstyle\int \tfrac{1}{v+v^2}\,dv = \int \tfrac{1}{t}\,dt + c \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln|v| - \ln|1+v| = \ln|t| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln\left|\tfrac{v}{1+v}\right| = \ln|t| + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{v}{1+v} = kt \qquad \textit{onde } k \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad v(1-kt) = kt \\ &\Longleftrightarrow \quad v(t) = \tfrac{kt}{1-kt} \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \tfrac{kt^2}{1-kt} \end{aligned}$$

*onde na última linha se substituiu $v$ de volta por $\frac{y}{t}$.*

*Apesar da técnica de resolução só se aplicar quando $t \neq 0$, a extensão da função $y$ acima para $t = 0$ é válida e permanece solução da equação.*

*Falta estudar os casos em que $v + v^2 = v(v+1) = 0$ (onde $v = \frac{y}{t}$) excluídos no início da resolução:*

*– quando $v = 0$, obtém-se que $y(t) = 0$, $\forall t$, é solução, a qual pode ser descrita na forma acima se se tomar $k = 0$;*

*– quando $v = -1$, verifica-se, por substituição na equação diferencial, que $y(t) = -t$, $\forall t$, também é solução:*

$$t^2\frac{d}{dt}(-t) = -t^2 = 2t(-t) + (-t)^2\ .$$

*<u>Solução geral</u>:*

$$y(t) = \frac{kt^2}{1-kt} \quad \textit{com } k \in \mathbb{R} \qquad \textit{ou} \qquad y(t) = -t \; .$$

*<u>Intervalo de definição</u>: Para $k \neq 0$, o intervalo de definição duma solução da primeira forma é $]-\infty, \frac{1}{k}[$ ou $]\frac{1}{k}, \infty[$. Para $k = 0$, o intervalo de definição de $y(t) = 0$ é $\mathbb{R}$. O intervalo de definição da solução $y(t) = -t$ também é $\mathbb{R}$.*
*<u>Verificação</u>:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{2kt(1-kt)+k^2t^2}{(1-kt)^2} \\
t^2\frac{dy}{dt} &= \frac{2kt^3(1-kt)+k^2t^4}{(1-kt)^2} \\
2ty + y^2 &= \frac{2kt^3}{1-kt} + \frac{k^2t^4}{(1-kt)^2} \\
&= \frac{2kt^3(1-kt)+k^2t^4}{(1-kt)^2} = t^2\frac{dy}{dt} \qquad \textit{– ok!}
\end{aligned}$$

□

**Comentário:** *A equação dada tem duas famílias de soluções definidas em subintervalos de $\mathbb{R}$, cada uma parametrizada por $k \neq 0$, e tem ainda mais duas soluções ($y(t) = -t$ e $y(t) = 0$) definidas em todo o $\mathbb{R}$.* ♢

(13) Um objecto de massa $m$ é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial $V_0$. Considera-se um referencial em que o sentido positivo do eixo dos $y$'s coincida com a direcção vertical apontando para cima, estando a origem sobre a superfície da Terra. Assumindo que não há resistência do ar, mas considerando a variação do campo gravitacional terrestre com a altitude, obtém-se a seguinte lei para a velocidade $V(t)$ do objecto:

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$$

onde $R$ é o raio da Terra.

(a) Seja $V(t) = v(y(t))$, onde $v = v(y)$ é a velocidade como função da altitude $y$. Determine a equação diferencial satisfeita por $v(y)$.

(b) Calcule a chamada *velocidade de escape*, ou seja, calcule a menor velocidade inicial $V_0$ para a qual o objecto não regressa à Terra.

**Sugestão:** A velocidade de escape é determinada impondo que $v(y)$ permaneça positivo.

(14) Considere uma espécie com reprodução sexuada: cada membro da população necessita de encontrar um parceiro para se reproduzir. Seja $N(t)$ a população total no instante $t$. O número de encontros entre machos e fêmeas deve ser proporcional ao produto do número de machos pelo número de fêmeas. Como cada um destes números é proporcional a $N(t)$, o número de nascimentos é proporcional a $N^2(t)$. Por outro lado, a taxa de mortalidade é proporcional a $N(t)$ pois não depende de encontros entre indivíduos.
Em resumo, a população $N(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = bN^2 - aN \quad , \text{ com } a, b > 0 \ .$$

Mostre que, se $N(0) < \frac{a}{b}$, então $N(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Conclua que, quando a população é inferior ao nível crítico $\frac{a}{b}$, a população está em vias de extinção.

## Equações Exactas

(15) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$2t \sin y + y^3 e^t + (t^2 \cos y + 3y^2 e^t)\frac{dy}{dt} = 0 \ .$$

**Resolução:** *Esta equação não é linear nem separável.*
*Teste de equação exacta:*
*A equação*

$$\underbrace{2t \sin y + y^3 e^t}_{M(t,y)} + \underbrace{(t^2 \cos y + 3y^2 e^t)}_{N(t,y)} \frac{dy}{dt} = 0$$

*é exacta se e só se existe uma função "potencial", $F = F(t, y)$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & M(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & N(t,y) \end{cases}$$

*(por definição de* equação exacta*).*

*Uma vez que as expressões de $M(t, y)$ e $N(t, y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência duma tal função potencial $F$ é*[1]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \ .$$

*Ora*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2t \cos y + 3y^2 e^t = \frac{\partial N}{\partial t} \ ,$$

*pelo que se conclui que a equação é exacta.*

[1] Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t, y), N(t, y))$ ser o gradiante, $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t, y)$.

*Resolução da EDO:*
*Determina-se uma função potencial, $F$:*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & 2t\sin y + y^3 e^t \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & t^2 \cos y + 3y^2 e^t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F(t,y) & = & \int (2t\sin y + y^3 e^t)\, dt + f(y) \\ \\ F(t,y) & = & \int (t^2 \cos y + 3y^2 e^t)\, dy + g(t) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F(t,y) & = & t^2 \sin y + y^3 e^t + f(y) \\ \\ F(t,y) & = & t^2 \sin y + y^3 e^t + g(t)\ . \end{cases}$$

*Escolhendo*

$$F(t,y) = t^2 \sin y + y^3 e^t\ ,$$

*a equação diferencial fica equivalente a*

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = 0 \iff F(t,y) = c \iff t^2 \sin y + y^3 e^t = c\ .$$

*Solução:*

$$t^2 \sin y + y^3 e^t = c \qquad (\star) \qquad \textit{com}\ \ c \in \mathbb{R}\ .$$

*Verificação:*

$$\begin{array}{rl} & t^2 \sin y + y^3 e^t \qquad \textit{é constante} \\ \\ \Longleftrightarrow & \frac{d}{dt}\left(t^2 \sin y + y^3 e^t\right) = 0 \\ \\ \Longleftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \sin y + y^3 e^t\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(t^2 \sin y + y^3 e^t\right)\frac{dy}{dt} = 0 \\ \\ \Longleftrightarrow & 2t \sin y + y^3 e^t + (t^2 \cos y + 3y^2 e^t)\frac{dy}{dt} = 0 \quad \textit{– ok!} \end{array}$$

□

**Comentário:** *Pelo teorema da função implícita, se for dada uma condição inicial, $y(t_0) = y_0$, a expressão $(\star)$ determina $y = y(t)$ em torno de $t = t_0$, desde que seja satisfeita a condição*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0\ ,$$

*ou seja,*

$$t_0^2 \cos y_0 + 3y_0^2 e^{t_0} \neq 0\ .$$

♢

(16) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *A equação diferencial não é linear nem separável.*
*Teste de equação exacta:*
*A equação diferencial*

$$\underbrace{3t^2 + 4ty}_{M(t,y)} + \underbrace{(2y + 2t^2)}_{N(t,y)}\frac{dy}{dt} = 0$$

*é exacta se e só se existe uma função potencial, $F = F(t,y)$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & M(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & N(t,y) \end{cases}$$

*(por definição de* equação exacta*).*

*Uma vez que as expressões de $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência duma tal função potencial $F$ é*[2]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \ .$$

*Ora*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4t = \frac{\partial N}{\partial t} \ ,$$

*pelo que se conclui que a equação é exacta.*
*Resolução da EDO:*
*Para encontrar uma função potencial, $F$, resolve-se o sistema de equações*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & 3t^2 + 4ty \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & 2y + 2t^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) & = & \int (3t^2 + 4ty)\, dt + f(y) \\ \\ F(t,y) & = & \int (2y + 2t^2)\, dy + g(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) & = & t^3 + 2t^2 y + f(y) \\ \\ F(t,y) & = & y^2 + 2t^2 y + g(t) \ . \end{cases}$$

*Escolhendo*

$$F(t,y) = t^3 + y^2 + 2t^2 y \ ,$$

*a equação diferencial fica equivalente a*

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = 0 \iff F(t,y) = c \iff t^3 + y^2 + 2t^2 y = c \ .$$

*Condição inicial:*
*A condição $y(0) = 1$ impõe que a constante real $c$ satisfaça*

$$0^3 + 1^2 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1 = c \iff c = 1 \ .$$

[2]Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t,y), N(t,y))$ ser o gradiante, $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t,y)$.

*A solução do problema de valor inicial é dada por*

$$t^3 + y^2 + 2t^2 y = 1 \iff y^2 + 2t^2 y + t^3 - 1 = 0$$

$$\iff y(t) = -t^2 \pm \sqrt{t^4 - t^3 + 1}\ .$$

*De modo a que $y(0) = 1$, escolhe-se o sinal $+$ para a raiz quadrada.*
*Intervalo de definição:*
*– Para que $y = y(t)$ esteja definida, o argumento da raiz quadrada tem que ser não-negativo.*
*– Para que $y = y(t)$ seja diferenciável, o argumento da raiz quadrada tem que ser positivo, o que acontece sempre:*

- *quando $t \geq 1$, tem-se $t^4 \geq t^3$, logo $t^4 - t^3 + 1 \geq 1$;*
- *quando $t \leq 0$, tem-se $t^4 \geq 0$ e $-t^3 \geq 0$, logo $t^4 - t^3 + 1 \geq 1$;*
- *quando $0 < t < 1$, tem-se $t^4 > 0$ e $t^3 < 1$, logo $t^4 - t^3 + 1 > 0$.*

*Conclui-se que o intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$.*
*Solução do problema de valor inicial:*

$$y(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}\ , \qquad \textit{para todo o } t \in \mathbb{R}\ .$$

*Verificação:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(-t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}\right) \\
&= -2t + \frac{4t^3 - 3t^2}{2\sqrt{t^4 - t^3 + 1}} \\
2y + 2t^2 &= 2\sqrt{t^4 - t^3 + 1} \\
(2y + 2t^2)\frac{dy}{dt} &= -4t\sqrt{t^4 - t^3 + 1} + 4t^3 - 3t^2 \qquad (\star) \\
3t^2 + 4ty &= 3t^2 - 4t^3 + 4t\sqrt{t^4 - t^3 + 1} \qquad (\star\star) \\
(\star\star) + (\star) &= 0 \qquad \textit{– ok!} \\
y(0) &= -0 + \sqrt{0 - 0 + 1} = 1 \qquad \textit{– ok!}
\end{aligned}$$

□

(17) Determine a constante real $\alpha$ para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$e^{\alpha t + y} + 3t^2 y^2 + (2yt^3 + e^{\alpha t + y})\frac{dy}{dt} = 0\ .$$

**Resolução:**
*Determinação de $\alpha$:*
*A equação*

$$\underbrace{e^{\alpha t + y} + 3t^2 y^2}_{M(t,y)} + \underbrace{(2yt^3 + e^{\alpha t + y})}_{N(t,y)}\frac{dy}{dt} = 0$$

*é exacta se e só se existe uma função potencial, $F = F(t, y)$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = M(t, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(t, y) \end{cases}$$

*(por definição de* equação exacta*).*

*Uma vez que as expressões de $M(t,y)$ e $N(t,y)$ são continuamente diferenciáveis em todo o $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária e suficiente para a existência duma tal função potencial $F$ é*[3]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \ .$$

*Há então que escolher $\alpha$ de modo a satisfazer a equação*

$$e^{\alpha t+y} + 6t^2y = 6yt^2 + \alpha e^{\alpha t+y} \iff \alpha = 1 \ .$$

*Para que a equação seja exacta, a constante $\alpha$ deve ser 1.*
*Resolução da equação para $\alpha = 1$:*
*Quando $\alpha = 1$, encontra-se uma função potencial, $F$, resolvendo o sistema de equações*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= e^{t+y} + 3t^2y^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2yt^3 + e^{t+y} \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} F(t,y) &= \int (e^{t+y} + 3t^2y^2)\, dt + f(y) \\ F(t,y) &= \int (2yt^3 + e^{t+y})\, dy + g(t) \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} F(t,y) &= e^{t+y} + t^3y^2 + f(y) \\ F(t,y) &= y^2t^3 + e^{t+y} + g(t) \ . \end{cases}$$

*Uma solução possível é*

$$F(t,y) = t^3y^2 + e^{t+y} \ .$$

*A equação dada é equivalente a*

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = 0 \iff F(t,y) = c \iff t^3y^2 + e^{t+y} = c \ .$$

*Solução:*

$$t^3y^2 + e^{t+y} = c \qquad (\star) \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

*Verificação:*

$$\begin{aligned} & t^3y^2 + e^{t+y} \qquad \text{é constante} \\ \iff \quad & \tfrac{d}{dt}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right) = 0 \\ \iff \quad & \tfrac{\partial}{\partial t}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(t^3y^2 + e^{t+y}\right)\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff \quad & 3t^2y^2 + e^{t+y} + (2yt^3 + e^{t+y})\tfrac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

□

**Comentário:** *Pelo teorema da função implícita, se for dada uma condição inicial, $y(t_0) = y_0$, a expressão $(\star)$ determina $y = y(t)$ em torno de $t = t_0$, desde que seja satisfeita a condição*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0 \ ,$$

*ou seja,*

$$2y_0t_0^3 + e^{t_0+y_0} \neq 0 \ , \qquad (\star\star)$$

[3]Cf. Análise Matemática III: condição para um campo vectorial $(M(t,y), N(t,y))$ ser o gradiante, $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y})$, de alguma função escalar $F(t,y)$.

*Pode-se ver que, para a equação diferencial dada, as condições iniciais só são admissíveis se verificarem a condição* $(\star\star)$*: Suponha-se, por redução ao absurdo, que existia uma solução com condição inicial* $(t_0, y_0)$ *tal que*

$$2y_0t_0^3 + e^{t_0+y_0} = 0 \ .$$

*A própria EDO avaliada em* $(t_0, y_0)$ *imporia também que*

$$e^{t_0+y_0} + 3t_0^2y_0^2 = 0 \ .$$

*Nesse caso, teria que ser* $t_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$*. Então*

$$2y_0t_0^3 = 3t_0^2y_0^2 \iff 2t_0 = 3y_0 \iff y_0 = \frac{2}{3}t_0 \ .$$

*Voltando a substituir, ficaria*

$$0 = \left[2y_0t_0^3 + e^{t_0+y_0}\right]_{y_0=\frac{2}{3}t_0} = \frac{4}{3}t_0^4 + e^{\frac{5}{3}t_0} \ ,$$

*o que é impossível, pois a exponencial é sempre positiva e o primeiro termo nunca é negativo.* $\diamondsuit$

(18) Mostre que qualquer equação separável da forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

é exacta.

**Resolução:** *Para* $f(y) \neq 0$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \iff \underbrace{g(t)}_{M(t,y)} \underbrace{-f(y)}_{N(t,y)} \frac{dy}{dt} = 0 \ .$$

*A equação é exacta se e só se existe uma função potencial,* $F = F(t, y)$*, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & M(t, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & N(t, y) \end{cases}$$

*ou seja,*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} & = & g(t) \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = & -f(y) \end{cases}$$

$$\iff \quad F(t, y) = \int g(t)\, dt - \int f(y)\, dy + c$$

*onde* $c$ *é uma constante real arbitrária. Portanto, qualquer equação separável da forma*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

*é exacta; além disso, é equivalente, para* $f(y) \neq 0$*, a*

$$\int g(t)\, dt - \int f(y)\, dy = \text{ constante} \ .$$

$\square$

## Equações Redutíveis a Exactas

(19) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty)\dot{y} = 0 \ , \qquad y(2) = 1 \ .$$

**Resolução:** *A equação não é linear nem separável. Também não é exacta porque*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3ty + y^2\right) = 3t + 2y \neq 2t + y = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 + ty\right) \ .$$

*Assim, resta tentar encontrar um factor de integração $\mu$. A equação que $\mu = \mu(t, y)$ tem de verificar para ser um factor de integração é*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}\left((3ty + y^2)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((t^2 + ty)\mu\right) \\ \iff \quad & (3t + 2y)\mu + (3ty + y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} = (2t + y)\mu + (t^2 + ty)\frac{\partial \mu}{\partial t} \ . \end{aligned}$$

*Como não se aprende a resolver estas equações em AMIV, tenta-se achar um factor de integração que seja só função de $y$ ou só função de $t$. Nesse caso a equação anterior simplifica-se porque uma das derivadas parciais de $\mu$ é nula.*

*A equação tem um factor de integração $\mu = \mu(y)$? Em caso afirmativo, o factor de integração tem de satisfazer a equação:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}\left((3ty + y^2)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((t^2 + ty)\mu\right) \\ \iff \quad & (3t + 2y)\mu(y) + (3ty + y^2)\frac{d\mu}{dy} = (2t + y)\mu(y) \\ \iff \quad & \frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu} = \frac{t + y}{3ty + y^2} \ . \end{aligned}$$

*Esta equação não tem soluções! Isto porque no termo esquerdo tem-se uma função de $y$ e no termo direito uma função que depende de $t$ e de $y$. Conclui-se que não existe um factor de integração que seja função só de $y$.*

*A equação tem um factor de integração $\mu = \mu(t)$? Em caso afirmativo, o factor de integração tem de satisfazer a equação:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}\left((3ty + y^2)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((t^2 + ty)\mu\right) \qquad (\star) \\ \iff \quad & (3t + 2y)\mu(t) = (2t + y)\mu(t) + (t^2 + ty)\frac{d\mu}{dt} \\ \iff \quad & \frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu} = \frac{t + y}{ty + t^2} \\ \iff \quad & \frac{\frac{d\mu}{dt}}{\mu} = \frac{1}{t} \ . \end{aligned}$$

*Esta equação tem soluções. Pode-se tomar, por exemplo, $\mu(t) = t$ para $t \neq 0$.*

*Resolução da equação usando o factor de integração: Multiplicando a equação pelo factor de integração obtém-se*

$$3t^2y + y^2t + (t^3 + t^2y)\dot{y} = 0 \qquad (\star\star)$$

*que é equivalente ao problema que se quer resolver para $t \neq 0$. Como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, a condição $(\star)$ é suficiente para a existência duma função potencial para o campo vectorial $(M, N)$*

$$M(t,y) = 3t^2y + y^2t \ , \qquad N(t,y) = t^3 + t^2y \ .$$

*Para encontrar uma função potencial $F(t,y)$, resolve-se o sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = 3t^2y + y^2t \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = t^3 + t^2y \end{cases} \iff \begin{cases} F(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}y^2t^2 + A(y) \\ \\ F(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 + B(t) \ . \end{cases}$$

*Portanto, um possível potencial para o campo $(M, N)$ é*

$$F(t,y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 \ .$$

*A equação $(\star\star)$ escreve-se*

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = 0 \ ,$$

*pelo que as soluções da EDO têm que verificar*

$$t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 = c$$

*onde $c$ é uma constante real arbitrária. O valor inicial determina a constante $c$:*

$$y(2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2^3 1 + \frac{1}{2}2^2 1^2 = c \quad \iff \quad c = 10 \ .$$

*Finalmente, utiliza-se a fórmula resolvente para obter uma solução explícita:*

$$\begin{aligned} & t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 - 10 = 0 \\ \iff \quad & y = \frac{-t^3 \pm \sqrt{t^6 + 20t^2}}{t^2} \\ \iff \quad & y = -t \pm \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}} \ . \end{aligned}$$

*A condição inicial força o sinal "+" na equação anterior. Como o limite de $y(t)$ é infinito quando $t \to 0$, conclui-se que o intervalo máximo de definição da solução é $]0, +\infty[$. Portanto, a condição $t \neq 0$ imposta na resolução da EDO não afecta a solução deste problema de valor inicial.*
*Solução do problema de valor inicial:*

$$y(t) = -t + \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}} \ .$$

*Intervalo de definição:* $]0, +\infty[$.
*Verificação: O valor inicial é*

$$y(2) = -2 + \sqrt{4 + \frac{20}{4}} = 1 \ .$$

*Quanto à equação, fazendo $u = \sqrt{t^2 + \frac{20}{t^2}}$ e notando que*

$$\frac{du}{dt} = \frac{2t - \frac{40}{t^3}}{2u} = \frac{t^4 - 20}{t^3u}$$

*tem-se*

$$\begin{aligned} & 3ty + y^2 + (t^2+ty)\dot{y} \\ = \; & 3t(-t+u) + (-t+u)^2 + (t^2 + t(-t+u))\left(-1 + \frac{t^4-20}{t^3u}\right) \\ = \; & -3t^2 + 3tu + t^2 - 2tu + u^2 - tu + t^2 - \frac{20}{t^2} \\ = \; & 0 \quad \text{– ok!} \end{aligned}$$

□

(20) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y^3 + 2yt + (4y^2t + 2t^2)\dot{y} = 0 \ , \qquad y(1) = 1 \ .$$

(21) A equação diferencial

$$6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt} = 0$$

admite um factor de integração da forma $\mu(ty)$, ou seja, um factor $\mu$ que só depende do produto das variáveis $ty$. Determine-o e dê a solução da equação com $y(1) = 1$.

**Sugestão:** A equação diferencial que dá $\mu = \mu(ty)$ pode ser escrita em termos duma só variável $v = ty$.

**Resolução:**
*Cálculo dum factor de integração: Uma função, $\mu = \mu(ty)$, que nunca se anula é factor de integração da equação dada se e só se*

$$\mu(ty)\left[6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt}\right] = 0 \qquad \text{é equação exacta.}$$

*Para tal, uma condição necessária é*

$$\begin{aligned} & \tfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu(ty)6y(t+y)\right] = \tfrac{\partial}{\partial t}\left[\mu(ty)t(4t+9y)\right] \\ \iff \quad & t\mu'(ty)6y(t+y) + 6t\mu(ty) + 12y\mu(ty) = \\ & = y\mu'(ty)t(4t+9y) + \mu(ty)8t + \mu(ty)9y \\ \iff \quad & \underbrace{(2t^2y - 3ty^2)}_{ty(2t-3y)}\mu'(ty) + \underbrace{(3y-2t)}_{-(2t-3y)}\mu(ty) = 0 \ . \end{aligned}$$

*Pondo $v = ty$, é suficiente resolver a seguinte equação separável com $\mu \neq 0$ e $v \neq 0$:*

$$\begin{aligned} v\mu'(v) - \mu(v) = 0 \quad & \iff \quad \tfrac{\mu'(v)}{\mu(v)} = \tfrac{1}{v} \\ & \iff \quad \ln|\mu(v)| = \ln|v| + c \\ & \iff \quad |\mu(v)| = k|v| \qquad \text{com } k > 0 \\ & \iff \quad \mu(v) = kv \qquad \text{com } k \neq 0 \ . \end{aligned}$$

*Como basta* um *factor de integração, escolhe-se, por exemplo,* $k = 1$*, ou seja,*

$$\mu(ty) = ty \ .$$

*Resolução da EDO usando o factor de integração encontrado: Para* $t \neq 0$ *e* $y \neq 0$*, a equação dada é equivalente à seguinte equação exacta:*

$$ty\left[6y(t+y) + t(4t+9y)\frac{dy}{dt}\right] = 0 \ .$$

*Uma função potencial,* $F(t,y)$*, determina-se através de*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} &= 6ty^2(t+y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= t^2y(4t+9y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &= \int 6ty^2(t+y)\,dt + f(y) \\ F(t,y) &= \int t^2y(4t+9y)\,dy + g(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F(t,y) &= 2t^3y^2 + 3t^2y^3 + f(y) \\ F(t,y) &= 2t^3y^2 + 3t^2y^3 + g(t) \ . \end{cases}$$

*Uma solução possível é*

$$F(t,y) = 2t^3y^2 + 3t^2y^3 \ .$$

*A solução da equação diferencial é dada implicitamente por*

$$\frac{d}{dt}F(t,y) = 0 \iff F(t,y) = c \iff 2t^3y^2 + 3t^2y^3 = c \ .$$

*Verificação: Para* $ty \neq 0$*,*

$$\begin{aligned} & 2t^3y^2 + 3t^2y^3 \qquad \text{é constante} \\ \iff & \tfrac{d}{dt}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right) = 0 \\ \iff & \tfrac{\partial}{\partial t}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(2t^3y^2 + 3t^2y^3\right)\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff & ty[6y(t+y)] + ty[t(4t+9y)]\tfrac{dy}{dt} = 0 \\ \iff & 6y(t+y) + t(4t+9y)\tfrac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

*Solução do problema de valor inicial: A condição* $y(1) = 1$ *impõe que a constante* $c$ *satisfaça*

$$2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = c \iff c = 5 \ .$$

*Pelo teorema da função implícita, como*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = t^2y(4t+9y)\big|_{t=1,y=1} = 13 \neq 0 \ ,$$

*conclui-se que a solução do problema de valor inicial é dada por*

$$2t^3y^2 + 3t^2y^3 = 5$$

*para* $t$ *numa vizinhança de* $t_0 = 1$*.* □

**Comentário:** *Esta solução poderia ser escrita explicitamente usando a fórmula resolvente para a equação do 3º grau.* $\diamondsuit$

## Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

(22) Determine uma solução contínua do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + y = g(t) \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad t > 1 \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *Para $0 \leq t \leq 1$, $\mu(t) = e^t$ é um factor de integração:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^t \frac{dy}{dt} + e^t y = 2e^t \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^t y) = 2e^t \\ &\Longleftrightarrow \quad e^t y = \int 2e^t \ dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = e^{-t}(2e^t + c) = 2 + ce^{-t} \ . \end{aligned}$$

*Condição inicial:* $0 = y(0) = 2 + c \Rightarrow c = -2$.
*Solução do problema de valor inicial para $0 \leq t \leq 1$:*

$$y(t) = 2 - 2e^{-t} \ .$$

*Continuação da solução para $t > 1$: Quando $t > 1$, a equação é homogénea; para $y \neq 0$ resolve-se pelo método de separação de variáveis:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\dot{y}}{y} \ dt = -\int dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} \ dy = -t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad |y(t)| = ke^{-t} \qquad \text{onde } k > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y(t) = ke^{-t} \qquad \text{onde } k \neq 0 \ . \end{aligned}$$

*A função $y(t) = 0$, $\forall t$, também é solução. Logo, a solução geral da equação diferencial para $t > 1$ é*

$$y(t) = ke^{-t} \qquad \text{onde } k \in \mathbb{R} \ .$$

*Para obter uma solução* contínua *do problema posto, a solução para $t > 1$ deve satisfazer uma condição inicial em $t = 1$ que a faça coincidir com o valor da solução no intervalo $0 \leq t \leq 1$:*

$$y(1) = 2 - 2e^{-1} \ .$$

*Assim impõe-se $ke^{-1} = 2 - 2e^{-1}$, ou seja, $k = 2e - 2$.*
*Solução:*

$$y(t) = \begin{cases} 2 - 2e^{-t} \ , & 0 \leq t \leq 1 \\ (2e-2)e^{-t} \ , & t > 1 \ . \end{cases}$$

*Verificação:*

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} \frac{d}{dt}[2 - 2e^{-t}] = 2e^{-t} \ , & 0 \leq t < 1 \\ \frac{d}{dt}[(2e-2)e^{-t}] = (2-2e)e^{-t} \ , & t > 1 \ . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} + y &= \begin{cases} 2e^{-t} + 2 - 2e^{-t} = 2 \ , \ 0 \leq t < 1 \\ (2-2e)e^{-t} + (2e-2)e^{-t} = 0 \ , \ t > 1 \end{cases} \\ &= g(t) \quad \textit{para } t \neq 1 \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

□

**Comentário:** *Esta "solução" contínua não é de classe $C^1$, porque os limites laterais de $\frac{dy}{dt}$ em $t = 1$ são diferentes:*

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1^-} \tfrac{dy}{dt} &= \lim_{t \to 1^-} 2e^{-t} = 2e^{-1} \\ \lim_{t \to 1^+} \tfrac{dy}{dt} &= \lim_{t \to 1^+} (2-2e)e^{-t} = (2-2e)e^{-1} \ . \end{aligned}$$

*Portanto, esta "solução" não é solução do problema de valor inicial no sentido estrito da definição de "solução de equação diferencial" onde se impõe ter primeira derivada contínua (i.e., ser de classe $C^1$).* ♢

(23) Prove que $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t(1+y) \\ y(0) = -1 \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *A função $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é claramente solução do problema dado porque*

$$\frac{d}{dt}(-1) = 0 \qquad \textit{e} \qquad t(1 + (-1)) = 0 \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*Como $f(t, y) = t(1 + y)$ é uma função de classe $C^1$ definida em $\mathbb{R}^2$, ela é localmente lipschitziana relativamente a $y$ em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, qualquer problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) = t(1+y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução. Em particular, $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é a única solução de*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t(1+y) \\ y(0) = -1 \ . \end{cases}$$

□

(24) Determine todas as soluções de classe $C^1$ do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \ , \qquad y(0) = 0 \ .$$

(25) Mostre que existe uma solução de classe $C^1$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = -1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

> **Sugestão:** Para $|y| < 1$ a equação pode ser resolvida como equação separável. Obtenha dessa maneira um par de soluções com a propriedade $y(t) \to -1$ quando $t \to 0^+$ ou $t \to 0^-$, cole-as e estenda ao resto de $\mathbb{R}$ como constante.

Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

**Resolução:** *De acordo com a sugestão, resolve-se a equação diferencial para $|y| < 1$ como equação separável:*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} = t\sqrt{1-y^2} &\iff \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-y^2}} = t \\ &\iff \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int t\,dt + c \\ &\iff \arcsin y = \tfrac{t^2}{2} + c \\ &\iff y(t) = \sin(\tfrac{t^2}{2} + c) \ . \end{aligned}$$

*Para que $y(0) = -1$, escolhe-se $c = -\frac{\pi}{2}$.*
*Para que $|y| < 1$, o argumento do seno tem que ser*

$$\begin{aligned} -\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2} < \tfrac{\pi}{2} &\iff 0 < t^2 < 2\pi \\ &\iff t \in ]-\sqrt{2\pi}, 0[ \text{ ou } t \in ]0, \sqrt{2\pi}[ \ . \end{aligned}$$

*Sejam*

$$y^-(t) = \sin(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2}) \ , \qquad t \in ]-\sqrt{2\pi}, 0[ \ ,$$

$$y^+(t) = \sin(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2}) \ , \qquad t \in ]0, \sqrt{2\pi}[ \ .$$

*Estas soluções podem-se colar em $t = 0$ e podem-se estender para $t \geq \sqrt{2\pi}$ ou $t \leq -\sqrt{2\pi}$ como sendo a constante 1.*

*Solução:*

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}) \ , & |t| < \sqrt{2\pi} \\ 1 \ , & |t| \geq \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

*Note-se que esta função é continuamente diferenciável em todo o $\mathbb{R}$; em particular, a derivada em $t = -\sqrt{2\pi}$ ou em $t = 0$ ou em $t = \sqrt{2\pi}$ é 0.*

*Verificação:*

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} t\cos(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}) , & |t| < \sqrt{2\pi} \\ 0 , & |t| \geq \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$t\sqrt{1-y^2} = \begin{cases} t\sqrt{1 - \sin^2(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2})} , & |t| < \sqrt{2\pi} \\ 0 , & |t| \geq \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t\cos(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}) , & |t| < \sqrt{2\pi} \\ 0 , & |t| \geq \sqrt{2\pi} \end{cases} \qquad \textit{– ok!}$$

*Relação com o teorema de Picard: A equação diferencial é da forma*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

*com $f(t, y) = t\sqrt{1 - y^2}$ definida para $t \in \mathbb{R}$ e $y \in [-1, 1]$.*

*Pelo teorema de Picard, a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*existe e é única se $f$ for localmente lipschitziana em relação a $y$ num domínio contendo $(t_0, y_0)$.*

*Neste caso, a função $f(t, y) = t\sqrt{1 - y^2}$* não *é localmente lipschitziana em relação a $y$ para qualquer domínio contendo $(t_0, y_0) = (0, -1)$. A condição falha exactamente em $y = -1$ porque*

$$\lim_{y\to -1} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y\to -1} \frac{-ty}{\sqrt{1-y^2}} = \infty \qquad \textit{para } t \approx 0 , t \neq 0 ,$$

*o que implica que*

$$\lim_{y\to -1} \frac{f(t, y) - f(t, -1)}{y - (-1)} = \infty \qquad \textit{para } t \approx 0 , t \neq 0 .$$

*Logo, qualquer que seja o intervalo $[-1, -1 + \varepsilon]$, não pode existir uma constante $L_\varepsilon$ satisfazendo*[4]

$$|f(t, y) - f(t, -1)| \leq L_\varepsilon |y + 1| , \qquad \forall y \in [-1, -1 + \varepsilon] ,$$

*para $t \approx 0$, $t \neq 0$.* □

**Comentário:**

- *A função $f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a $y$ para $y \in ]-1, 1[$, porque a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua para $y \in ]-1, 1[$.*

[4]Cf. definição de *função localmente lipschitziana.*

- *A função* $y(t) = \sin(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *não é solução da equação diferencial. De facto, a igualdade* $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ *usada na verificação só é verdadeira quando* $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *Para outros valores de* $x$, *o co-seno é negativo e tem-se* $\sqrt{1-\sin^2 x} = -\cos x$.

$\diamondsuit$

(26) Mostre que a solução do seguinte problema de valor inicial existe, é única e está definida para $0 \leq t \leq 1$:

$$\dot{y} = y^2 + \cos t^2 \quad , y(0) = 0$$

**Resolução:** *Esta equação não pode ser resolvida explicitamente pelos métodos estudados. No entanto, a solução explícita não é necessária para responder à questão.*

*A função* $f(t,y) = y^2 + \cos t^2$ *é de classe* $C^1$ *em* $\mathbb{R}^2$. *Portanto, o teorema de Picard garante a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial. O teorema garante ainda que a solução do problema de valor inicial pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição* $]a,b[$ *(contendo 0) tal que, quando* $t \to a^+$ *ou* $t \to b^-$, $(t, y(t))$ *tende para a fronteira do domínio de* $f$. *Uma vez que* $f$ *está definida em todo o* $\mathbb{R}^2$, *isto significa que* $(t,y(t)) \to \infty$ *nos extremos do intervalo de definição. Em particular, se* $a$ *(respectivamente* $b$*) for finito então a solução* explode *para* $t = a$ *(respectivamente* $t = b$*), isto é,* $y(t) \to \infty$ *quando* $t \to a$ *(respectivamente* $t \to b$*).*

*Assim para mostrar que o intervalo de definição da solução contém* $[0,1]$ *é suficiente mostrar que a solução* $y(t)$ *não explode para* $t \leq 1$. *Uma maneira de fazer isto é encontrar dois problemas de valor inicial*

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} &= f(t,u)\ , & u(0) = 0 \\ \tfrac{dv}{dt} &= g(t,v)\ , & v(0) = 0\ . \end{aligned}$$

*cujos intervalos de definição contenham* $[0,1]$ *e que verifiquem*

$$u(t) \leq y(t) \leq v(t)\ .$$

*Para que esta última condição seja verificada basta*[5] *que*

$$f(t,y) \leq y^2 + \cos t^2 \leq g(t,y)\ .$$

*Uma vez que, para* $0 \leq t \leq 1$, *se tem*

$$0 \leq y^2 + \cos t^2 \leq y^2 + 1$$

*pode-se considerar os problemas de valor inicial*

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} &= 0\ , & u(0) = 0 \\ \tfrac{dv}{dt} &= v^2 + 1\ , & v(0) = 0\ . \end{aligned}$$

*O primeiro tem solução constante* $u(t) = 0$. *Quanto ao segundo, trata-se duma equação separável*

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2+1} \cdot \frac{dv}{dt} = 1 \quad &\iff \quad \frac{d}{dt}(\arctan v) = 1 \\ &\iff \quad v(t) = \tan(t + c) \end{aligned}$$

[5] Ver Proposição 3.2.11, página 160, do livro *Equações Diferenciais Ordinárias* por F. Pestana da Costa.

*onde $c$ é uma constante real. A condição inicial implica $c = 0$. Logo, a solução é*

$$v(t) = \tan t$$

*com intervalo máximo de definição $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Conclui-se que*

$$0 \leq y(t) \leq \tan t \ , \qquad \textit{para} \ \ 0 \leq t \leq 1$$

*o que mostra que o intervalo de definição de $y(t)$ contém $[0,1]$.* □

## Campos de Direcções

(27) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y(y-2) \ .$$

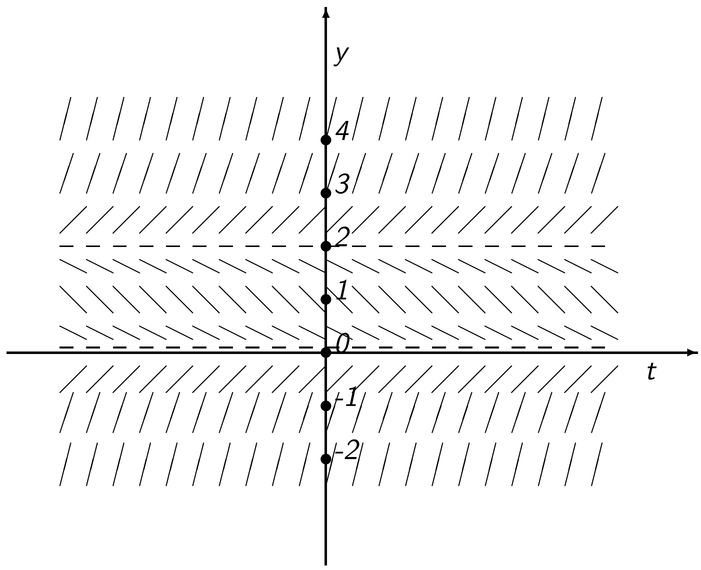
**Resolução:** *Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução $y(t)$ tem declive $\frac{dy}{dt} = c$, é determinado pela equação*

$$y(y-2) = c \ .$$

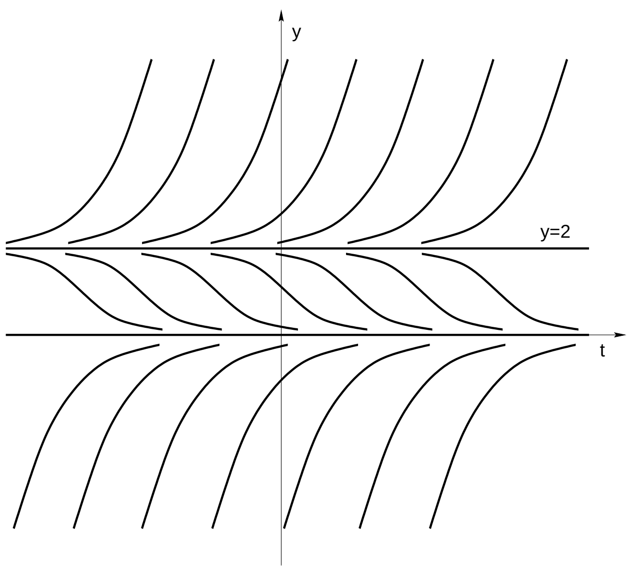
*Casos especiais:*

| | |
|---|---|
| $c < -1$ | $y^2 - 2y - c = 0 \iff y = 1 \pm \sqrt{1+c}$ *é impossível* |
| $c = -1$ | $y^2 - 2y + 1 = 0 \iff y = 1$ |
| $c = -\frac{1}{2}$ | $y^2 - 2y + \frac{1}{2} = 0 \iff y = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $c = 0$ | $y = 0$ *ou* $y = 2$ |
| $c = 1$ | $y^2 - 2y - 1 = 0 \iff y = 1 \pm \sqrt{2}$ |
| $c = 3$ | $y^2 - 2y - 3 = 0 \iff y = 1 \pm 2$ |
| $c = 8$ | $y^2 - 2y - 8 = 0 \iff y = 1 \pm 3$ |

*Esboço do campo de direcções:*



*Traçado dos tipos de solução:*




□

(28) Esboce os campos de direcções e trace os vários tipos de solução para as seguintes equações diferenciais:
(a) $\dot{y} = y(y^2 - 1)$;
(b) $\dot{y} = t^2 + y^2$;
(c) $\dot{y} = \frac{y+t}{y-t}$.

## Formas canónicas de Jordan

(29) Para cada uma das matrizes $A$ seguintes, determine uma forma canónica de Jordan $J$, e uma matriz de mudança de base $S$ tal que $A = SJS^{-1}$.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
(c)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(d)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Resolução:**

(a) *A matriz $A$ é um bloco de Jordan, portanto $J = A$ e*
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(b) *Os valores próprios da matriz são as soluções de*
$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2i .$$

*Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de $A$ é*

$$J = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} .$$

*Os vectores próprios associados a $1+2i$ são os vectores* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *que verificam*

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -ia = b .$$

*Uma base do espaco próprio de $1+2i$ é constituída pelo vector*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} .$$

*Os vectores próprios associados a $1-2i$ são os vectores* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *que verificam*

$$\begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad ia = b .$$

*Uma base do espaco próprio de $1-2i$ é constituída pelo vector*

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} .$$

*Portanto uma matriz de mucança de base que põe $A$ em forma canónica é*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} .$$

(c) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda-2)^2 = 0 .$$

*Logo $A$ tem apenas um valor próprio, $\lambda = 2$. Uma vez que a matriz não é igual a $2I$ (onde $I$ é a matriz identidade), o espaço próprio tem necessariamente dimensão 1 e portanto a forma canónica de Jordan de $A$ é*

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

*Os vectores próprios de $A$ são os que verificam $(A-2I)v = 0$, ou seja*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad b = -a .$$

*Uma base dos vectores próprios é formada, por exemplo, pelo vector*

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

*Um vector próprio generalizado é um vector $w$ que satisfaz $(A-2I)w = v$. Podemos tomar, por exemplo,*

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

*Conclui-se que uma matriz de mudança de base que põe $A$ em forma canónica é*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(d) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \iff \\
-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+(1-\lambda) &= 0 \iff \\
(1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) &= 0 \iff \\
(1-\lambda)(1-\lambda)^2 &= 0 \iff \\
(1-\lambda)^3 &= 0 \;.
\end{aligned}$$

*Logo* $A$ *tem apenas um valor próprio,* $\lambda = 1$*. Os vectores próprios são os que verificam*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \iff \qquad c = b - a \;.$$

*Uma base do espaco próprio é constituída pelos vectores*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*que se obtiveram fazendo* $a = 1, b = 1$ *e* $a = -1, b = 0$*, respectivamente. Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de* $A$ *é*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;.$$

*Falta achar um vector próprio generalizado correspondente à terceira coluna de* $J$*. Esse vector será uma solução de*

$$(A - I)w = v$$

*onde* $v$ *é um vector próprio correspondente ao valor próprio 1 que gera o espaço das colunas da matriz* $(A - I)$*. Uma vez que*

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \;,$$

*o espaço das colunas é gerado por* $v_1 + v_2$*. Assim, procura-se uma solução de*

$$(A - I)w = v_1 + v_2 \;.$$

*Toma-se, por exemplo,*

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Portanto, uma matriz de mudança de base que põe* $A$ *em forma canónica é*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*onde a primeira coluna é o vector próprio* $v_1$*, a segunda coluna é o vector próprio* $v_1 + v_2$ *e a terceira coluna é o vector próprio generalizado* $w$ *associado a* $v_1 + v_2$*.*

□

(30) Para cada uma das matrizes $A$ seguintes, determine uma forma canónica de Jordan $J$, e uma matriz de mudança de base $S$ tal que $A = SJS^{-1}$.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(f)
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

## Exponencial de Matrizes

(31) Para cada uma das matrizes $A$ seguintes, determine $e^{At}$.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(e)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

**Resolução:**

(a) *A exponencial de uma matriz diagonal, $At$, é a matriz diagonal cujas entradas são as usuais exponenciais escalares das entradas correspondentes em $At$. Deste modo,*

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\pi t} & 0 \\ 0 & e^{2\pi t} \end{bmatrix} .$$

(b) *Os valores próprios de $A$ são dados por*

$$\begin{aligned} (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 2 \ . \end{aligned}$$

*Os vectores próprios associados ao valor próprio $0$ são dados por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a = b\ .$$

*Os vectores próprios associados ao valor próprio $2$ são dados por*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b\ .$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+e^{2t}}{2} & \frac{-1+e^{2t}}{2} \\ \frac{-1+e^{2t}}{2} & \frac{1+e^{2t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) *A matriz $A$ tem apenas um valor próprio, $\lambda = 1$, o qual tem um espaço próprio de dimensão 1. Um vector próprio é uma solução de $(A - I)v = 0$, isto é,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

*Por exemplo pode-se tomar*

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

*Um vector próprio generalizado $w$, obtém-se resolvendo a equação $(A - I)w = v$, isto é,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = v$$

*Por exemplo, pode-se tomar*

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

*Relativamente, à base $(v, w)$, a transformação linear representada por $A$ é dada por um bloco de Jordan, $J$, para o valor próprio 1, ou seja,*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

*Logo, a exponencial é*

$$e^{At} = S \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

**Comentário:** *Notando que $\frac{1}{2}A$ é um bloco de Jordan para o valor próprio $\frac{1}{2}$, podia-se, em alternativa, calcular*

$$e^{\frac{1}{2}At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & te^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

*e avaliar em $2t$.* ♢

(d) *Os valores próprios de $A$ são dados por*

$$\begin{aligned}(4-\lambda)(-2-\lambda)+10=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2-2\lambda+2=0\\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm i\ .\end{aligned}$$

*Os vectores próprios (complexos) associados ao valor próprio $\lambda = 1+i$ são dados por*

$$\begin{bmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{i-3}{5}a\ .$$

*Os vectores próprios para o valor próprio $1-i$ são dados por*

$$\begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{-3-i}{5}a\ .$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i-3}{5} & \frac{-3-i}{5} \end{bmatrix}}_{S}\begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1-3i}{2} & \frac{-5i}{2} \\ \frac{1+3i}{2} & \frac{5i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^t\begin{bmatrix} \frac{(e^{it}+e^{-it})-3i(e^{it}-e^{-it})}{2} & \frac{-5i(e^{it}-e^{-it})}{2} \\ i(e^{it}-e^{-it}) & \frac{(e^{it}+e^{-it})+3i(e^{it}-e^{-it})}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^t\begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t & 5\sin t \\ -2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Comentário:** *Se $\lambda$ é valor próprio complexo da matriz real $A$ com o vector próprio $v$, então o seu complexo conjugado também é valor próprio de $A$ e o vector complexo conjugado de $v$ é um vector próprio correspondente: $Av = \lambda v \implies \overline{Av} = \overline{\lambda v} \implies A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Esta observação permite simplificar cálculos.* $\diamondsuit$

(e) *A matriz é um bloco de Jordan 3 por 3.*

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{5t} & te^{5t} & \frac{t^2}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

$\square$

## Sistemas de Equações Lineares

(32) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de $A$?
(b) Quais são os vectores próprios de $A$?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, $S$, que diagonaliza $A$, e determine a sua inversa, $S^{-1}$.
(d) Calcule $e^{At}$.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

**Resolução:**

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4 .$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3 .$$

*Os valores próprios de $A$ são -1 e 3.*

(b) *Um vector $v$ é vector próprio de $A$ associado ao valor próprio $\lambda$ se e só se $Av = \lambda v$, ou seja, se e só se $(A - \lambda I)v = 0$. Em componentes, escreve-se $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.*

*Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio $-1$:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b .$$

*Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são*

$$v = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

*Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio $3$:*

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

*Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$ são*

$$v = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

(c) *Mudando para uma base de vectores próprios de $A$, a transformação linear fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*cujas colunas são vectores próprios de $A$ associados aos valores próprios -1 e 3. A mudança inversa é*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

*Então tem-se*

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1} .$$

(d) *De acordo com a alínea anterior,*

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} .$$

(e) *A solução do problema de valor inicial dado é*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 6e^{3t} \\ e^{-t} + 6e^{3t} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

(f) *A solução geral da equação diferencial dada é*

$$\begin{aligned} y(t) &= S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

*onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

(g) *Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior com as colunas da matriz*

$$S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} ,$$

*ou seja, com as funções $Y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $Y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por*

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} .$$

*De facto, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são funções linearmente independentes e qualquer solução $y(t)$ da equação da alínea anterior é da forma $y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.*

□

(33) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule $e^{At}$.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(c) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= & 3y_1 & +y_2 & +e^{2t} \\ \dot{y}_2 &= & -y_1 & +y_2 & \end{cases} .$$

**Resolução:**

(a) *Os valores próprios de $A$ são dados por*

$$\begin{aligned} (3-\lambda)(1-\lambda)+1=0 \quad &\iff \quad \lambda^2-4\lambda+4=0 \\ &\iff \quad \lambda = 2 . \end{aligned}$$

*Os vectores próprios associados ao valor próprio $2$ são dados por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad -a = b .$$

*Como quaisquer dois vectores próprios são linearmente dependentes, escolhe-se um vector próprio, por exemplo,*

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

*e procura-se um vector próprio generalizado, $w$:*

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)w = v \quad &\iff \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad a+b=1 . \end{aligned}$$

*Por exemplo,*

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*é vector próprio generalizado. Portanto,*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(b) *A solução do problema de valor inicial é dada por:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y(0) \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

(c) *Esta equação diferencial pode ser escrita matricialmente na seguinte forma:*

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + b(t) \qquad \textit{onde} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

*A sua solução geral é dada pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} (1+t-s)e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ -(t-s)e^{2(t-s)} & (1-t+s)e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1-t) \end{bmatrix} + e^{2t} \int_0^t \begin{bmatrix} 1+t-s \\ -t+s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2 t + t + \frac{t^2}{2} \\ -c_1 t + c_2(1-t) - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

*onde* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(34) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule $e^{At}$.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(35) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule $e^{At}$.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(36) Considere a equação diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & & & \\ -2 & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

onde as entradas omitidas na matriz são zeros.
(a) Determine a solução de $(\star)$ com condição inicial

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \ , \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1 \ .$$

(b) Determine a solução de $(\star)$ com condição inicial

$$y_1(0) = 1 \ , \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \ .$$

(c) Determine o conjunto de todas as condições iniciais, $y_0 \in \mathbb{R}^5$, tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (\star) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

são limitadas.

**Resolução:** *Seja $A$ a matriz dos coeficientes. A solução de um problema de valor inicial*

$$\text{equação } (\star) \qquad \text{com} \qquad y(t_0) = y_0$$

*é*

$$y(t) = e^{At} y_0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*Para calcular a exponencial da matriz $At$ aproveitam-se os cálculos do exercício 31 alíneas (b) e (d):*

*Se $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, então*

$$e^{A_1 t} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t & 5\sin t \\ -2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{bmatrix} .$$

*Se $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então*

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix} .$$

*Como*

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & & \\ \hline & -2 & \\ \hline & & A_2 \end{array}\right] ,$$

*tem-se que*

$$e^{At} = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{A_1 t} & & \\ \hline & e^{-2t} & \\ \hline & & e^{A_2 t} \end{array}\right] .$$

(a) *A solução de* $(\star)$ *com condição inicial*

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 , \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1$$

*é*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(b) *A solução de* $(\star)$ *com condição inicial*

$$y_1(0) = 1 , \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0$$

*é*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -2\sin t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(c) *A solução de um problema de valor inicial*

$$\textit{equação } (\star) \qquad \textit{com} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

*é*

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos t + 3e^t \sin t & 5e^t \sin t & & & \\ -2e^t \sin t & e^t \cos t - 3e^t \sin t & & & \\ & & e^{-2t} & & \\ & & & \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ & & & \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} .$$

*A exponencial* $e^{At}$ *envolve as seguintes funções elementares*

$$e^t \cos t , \quad e^t \sin t , \quad e^{-2t} , \quad 1 , \quad e^{2t} .$$

*A única função limitada desta lista é a constante* $1$. *Para que uma solução seja limitada, as condições iniciais,* $y(0)$, *devem ser tais que todas as outras funções não apareçam. Logo, terá que ser*

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \qquad e \qquad a_4 = -a_5 .$$

*O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são limitadas é*

$$\left\{ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} .$$

$\square$

(37) Considere o sistema de equações diferenciais

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 &= -(\sin t) y_1 + e^{\cos t} \\ \\ \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} y_1 + (\cos t) y_2 + 3t e^{\sin t} . \end{cases}$$

(a) Determine a solução geral do sistema homogéneo associado:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -(\sin t) y_1 \\ \\ \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} y_1 + (\cos t) y_2 . \end{cases}$$

(b) Determine a solução geral de $(\star\star)$.

(c) Determine a solução de $(\star\star)$ com condição inicial:

$$y_1(0) = 1 \quad \text{e} \quad y_2(0) = 0 .$$

**Resolução:**

(a) *O sistema homogéneo pode ser resolvido em duas etapas.*
*Primeiro resolve-se a primeira equação*

$$\dot{y}_1 = -(\sin t) y_1 .$$

*Para* $y_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}_1}{y_1} = -\sin t \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\dot{y}_1}{y_1}\, dt = -\int \sin t \, dt + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y_1}\, dy_1 = \cos t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln |y_1| = \cos t + c \\ &\Longleftrightarrow \quad |y_1(t)| = k_1 e^{\cos t} \qquad \text{onde } k_1 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y_1(t) = k_1 e^{\cos t} \qquad \text{onde } k_1 \neq 0 . \end{aligned}$$

*Quando* $y_1$ *se anula, tem-se que* $y_1(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *também é solução. Logo, a solução geral da primeira equação é*

$$y_1(t) = k_1 e^{\cos t} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} , \qquad \text{onde } k_1 \in \mathbb{R} .$$

*De seguida, substitui-se a expressão geral para* $y_1$ *na segunda equação e resolve-se para obter* $y_2$*:*

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} \left( k_1 e^{\cos t} \right) + (\cos t) y_2 \\ &= k_1 e^{\sin t} + \underbrace{(\cos t)}_{-a(t)} y_2 . \end{aligned}$$

*Esta equação linear admite o factor de integração*

$$e^{\int a(t)\,dt} = e^{-\sin t} .$$

*Mutiplicada por $e^{-\sin t}$, a equação fica*

$$\begin{aligned} & e^{-\sin t}\dot{y}_2 - (\cos t)e^{-\sin t}y_2 = k_1 \\ \iff \quad & \tfrac{d}{dt}\left(e^{-\sin t}y_2\right) = k_1 \\ \iff \quad & e^{-\sin t}y_2 = k_1 t + k_2 \\ \iff \quad & y_2(t) = (k_1 t + k_2)e^{\sin t} . \end{aligned}$$

*A solução geral do sistema homogéneo é:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & k_1 e^{\cos t} \\ & & \\ y_2(t) & = & (k_1 t + k_2)e^{\sin t} , \end{array} \right. \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.*

(b) *A solução geral de $(\star\star)$ pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t)Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds ,$$

*onde $Y(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo. Obtém-se uma tal matriz $Y(t)$ tomando para colunas soluções linearmente independentes do sistema homogéneo, como por exemplo*

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix}$$

*onde se fixou $k_1 = 0, k_2 = 1$ para a primeira coluna e $k_1 = 1, k_2 = 0$ para a segunda. Com esta escolha, a inversa de $Y(s)$ é*

$$Y(s)^{-1} = \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} se^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix} .$$

*Assim, a solução geral de* $(\star\star)$ *é*

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} se^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds \\
= &\begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 te^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 2s \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
= &\begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 te^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} (c_2 + t)e^{\cos t} \\ (c_1 + c_2 t + 2t^2)e^{\sin t} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} , \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

(c) *A solução deste problema de valor inicial pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t)Y(0)^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t)Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds ,$$

*onde* $Y(t)$ *é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo, como por exemplo a utilizada na alínea anterior. Fazendo os cálculos,*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-1} e^{\cos t} \\ e^{-1} te^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e^{-1} + t)e^{\cos t} \\ (e^{-1} t + 2t^2)e^{\sin t} \end{bmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

□

(38) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

**Resolução:** *Começa-se por resolver a segunda equação escalar que dá* $y_2$*:*

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_2 \qquad \textit{com} \qquad y_2(0) = 0 .$$

*A solução é*

$$y_2(t) = 0 , \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

*Substituindo* $y_2$*, resolve-se agora a terceira equação escalar que dá* $y_3$*:*

$$\frac{dy_3}{dt} = 3y_3 + e^{2t} \qquad \textit{com} \qquad y_3(0) = 0 .$$

*A solução é*

$$y_3(t) = \int_0^t e^{3(t-s)}e^{2s}ds = e^{3t} - e^{2t} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*Finalmente, substitui-se $y_3$ e resolve-se a primeira equação escalar que dá $y_1$:*

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + e^{3t} \qquad \textit{com} \qquad y_1(0) = 0 \ .$$

*A solução é*

$$y_1(t) = \int_0^t e^{2(t-s)}e^{3s}ds = e^{3t} - e^{2t} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*O problema de valor inicial dado tem a seguinte solução:*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} - e^{2t} \\ 0 \\ e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

$\square$

**Comentário:** *Em alternativa, pode-se calcular a exponencial da matriz dos coeficientes e aplicar a fórmula de variação das constantes para sistemas de equações lineares.* $\diamondsuit$

(39) Suponha que as funções

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ \\ e^{2t} \\ \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ \\ e^{3t} \\ \\ e^{3t} \end{bmatrix} , \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ \\ -e^{3t} \\ \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

são três soluções $y(t)$ da equação $\dot{y} = Ay$. Determine os valores próprios de $A$. Justifique.

**Resolução:** *Pela fórmula de variação das constantes, as soluções de sistemas lineares de equações de primeira ordem homogéneas, $\dot{y} = Ay$, são combinações lineares de exponenciais multiplicadas por potências de $t$ da forma $t^k e^{\lambda t}$, onde $\lambda$ é um valor próprio complexo da matriz dos coeficientes, $A$.*

*As três funções dadas envolvem as exponenciais $e^t$, $e^{2t}$ e $e^{3t}$ e o sistema de equações é 3 por 3.*

*Logo, os valores próprios de $A$ são 1, 2 e 3.* $\square$

## Equações de Ordem Superior à Primeira

(40) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(2)} + y = \cos t \ . \qquad (\star)$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada a $(\star)$.
(b) Determine uma solução particular de $(\star)$.
(c) Determine a solução geral de $(\star)$.

**Resolução:**

(a) *A equação homogénea associada a* $(\star)$ *é*

$$y^{(2)} + y = 0 \iff (D^2+1)y = 0 \ .$$

*O seu polinómio característico,*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \ ,$$

*tem as seguintes raízes:*

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm i \ .$$

*A solução geral* complexa *da equação homogénea é pois*

$$y(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde* $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.
*A solução geral (real) da equação homogénea é*

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
**Comentário:** *A solução geral real obtém-se extraindo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \ .$$

*Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Convém fazer o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real.* $\diamondsuit$

(b) *Adopta-se o método dos coeficientes indeterminados:*
*A função* $\cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $D^2+1$. *Se* $y(t)$ *for solução particular de* $(\star)$, *i.e,*

$$(D^2+1)y = \cos t \ ,$$

*então, aplicando* $D^2+1$ *a ambos os membros, fica*

$$(D^2+1)(D^2+1)y = (D^2+1)\cos t = 0 \ .$$

*Vai-se procurar uma solução particular de* $(\star)$ *entre a solução geral da equação homogénea*

$$(D^2+1)^2 y = 0$$

*a qual é dada por*

$$y(t) = \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t \ .$$

*Os dois primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada a* $(\star)$, *logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação* não-*homogénea* $(\star)$. *Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 t \cos t + c_4 t \sin t$ *em* $(\star)$ *e determina-se os coeficientes* $c_3$ *e* $c_4$*:*

$$\begin{aligned}
& (D^2+1)(c_3 t \cos t + c_4 t \sin t) = \cos t \\
\iff \quad & -2c_3 \sin t + 2c_4 \cos t = \cos t \\
\iff \quad & c_3 = 0 \quad \text{e} \quad c_4 = \tfrac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

*Conclui-se que uma solução particular de* $(\star)$ *é, por exemplo,* $y(t) = \frac{1}{2} t \sin t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de* $(\star)$ *é da forma*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{solução particular} \\ \textit{de } (\star) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \textit{solução geral da equação} \\ \textit{homogénea associada a } (\star) \end{array} \right\}$$

*Assim, a solução geral de* $(\star)$ *é*

$$y(t) = \tfrac{1}{2} t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(41) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares.

(a)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 0 \ ,$$

(b)
$$y^{(3)} + \dot{y} = e^t \ ,$$

(c)
$$y^{(3)} + \dot{y} = te^t \ ,$$

(d)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 \ ,$$

(e)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 + \cos t \ ,$$

(f)
$$y^{(3)} + \dot{y} = e^{2t} \cos t \ .$$

**Resolução:**

(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^3 + D)y = 0 \ .$$

*O seu polinómio característico,*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda \ ,$$

*tem as raízes*

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i \ .$$

*A solução geral* complexa *da equação homogénea é pois*

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ,$$

*onde* $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.
*A solução geral (real) da equação homogénea é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ,$$

*onde* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
**Comentário:** *A solução geral real obtém-se extraindo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \ .$$

*Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Recomenda-se o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real.* ♢

(b) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral é da forma*

$$\{\text{ solução particular }\} + \left\{\begin{array}{c}\text{solução geral da equação}\\ \text{homogénea associada}\end{array}\right\} .$$

*Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função $e^t$ é aniquilada pelo operador diferencial $D-1$. Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = e^t \ ,$$

*então, aplicando $D-1$ a ambos os membros, fica*

$$(D-1)D(D^2+1)y = (D-1)e^t = 0 \ .$$

*Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea*

$$(D-1)D(D^2+1)y = 0$$

*a qual é dada por*

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t} + c_3e^t \ .$$

*Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação* não-*homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3e^t$ na equação e determina-se o coeficiente $c_3$:*

$$\begin{array}{rl} & D(D^2+1)(c_3e^t) = e^t \\ \iff & 2c_3e^t = e^t \\ \iff & c_3 = \frac{1}{2} \ . \end{array}$$

*Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = \frac{1}{2}e^t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2}e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{\text{ solução particular }\} + \left\{\begin{array}{c}\text{solução geral da equação}\\ \text{homogénea associada}\end{array}\right\} .$$

*Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função $te^t$ é aniquilada pelo operador diferencial $(D-1)^2$. Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = te^t \ ,$$

*então, aplicando $(D-1)^2$ a ambos os membros, fica*

$$(D-1)^2D(D^2+1)y = (D-1)^2e^t = 0 \ .$$

*Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea*

$$(D-1)^2D(D^2+1)y = 0$$

*a qual é dada por*

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t} + c_3e^t + c_4te^t \ .$$

*Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 e^t + c_4 t e^t$ *na equação e determina-se os coeficientes* $c_3$ *e* $c_4$*:*

$$\begin{aligned} & D(D^2+1)(c_3 e^t + c_4 t e^t) = t e^t \\ \iff\quad & 2c_3 e^t + 4c_4 e^t + 2c_4 t e^t = t e^t \\ \iff\quad & 2c_3 + 4c_4 = 0 \ \text{ e } \ 2c_4 = 1 \\ \iff\quad & c_3 = -1 \ \text{ e } \ c_4 = \tfrac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

*Uma solução particular é, por exemplo,* $y(t) = -e^t + \frac{1}{2} t e^t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$*. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + -e^t + \frac{1}{2} t e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(d) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} + \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} .$$

*Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função* $1$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $D$*. Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = 1 \ ,$$

*então, aplicando* $D$ *a ambos os membros, fica*

$$D^2(D^2+1)y = D1 = 0 \ .$$

*Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea*

$$D^2(D^2+1)y = 0$$

*a qual é dada por*

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 t \ .$$

*Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 t$ *na equação e determina-se o coeficiente* $c_3$*:*

$$D(D^2+1)(c_3 t) = 1 \quad \iff \quad c_3 = 1 \ .$$

*Uma solução particular é, por exemplo,* $y(t) = t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$*. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(e) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} + \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} .$$

*Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função* $1 + \cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $D(D^2+1)$*, porque* $D$ *aniquila* $1$ *e* $D^2+1$ *aniquila* $\cos t$*. Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = 1 + \cos t \ ,$$

*então, aplicando $D(D^2+1)$ a ambos os membros, fica*

$$D^2(D^2+1)^2y = D(D^2+1)(1+\cos t) = 0 \ .$$

*Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea*

$$D^2(D^2+1)^2y = 0$$

*a qual é dada por*

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t} + c_3t + c_4t\cos t + c_5t\sin t \ .$$

*Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3t + c_4t\cos t + c_5t\sin t$ *na equação e determina-se os coeficientes* $c_3$, $c_4$ *e* $c_5$*:*

$$\begin{aligned} & D(D^2+1)(c_3t + c_4t\cos t + c_5t\sin t) = 1+\cos t \\ \iff\quad & c_3 - 2c_4\cos t - 2c_5\sin t = 1+\cos t \\ \iff\quad & c_3 = 1 \ \text{ e } \ c_4 = -\tfrac{1}{2} \ \text{ e } \ c_5 = 0 \ . \end{aligned}$$

*Uma solução particular é, por exemplo,* $y(t) = t - \frac{t}{2}\cos t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$*. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t + t - \frac{t}{2}\cos t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(f) *Basta encontrar uma solução particular para a equação. A função* $e^{2t}\cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $(D-2)^2+1$*. Assim, uma solução particular da equação será uma solução da equação homogénea*

$$D(D^2+1)\left((D-2)^2+1\right)y = 0$$

*A solução geral desta equação é dada por*

$$y(t) = c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t$$

*Os três primeiros termos são soluções da equação homogénea inicial por isso podemos fazer* $c_0 = c_1 = c_2 = 0$*. Tendo em conta que*

$$(D^2+1)\left(e^2t\cos t\right) = 4e^{2t}\cos t - 4e^{2t}\sin t$$

*e que*

$$(D^2+1)\left(e^{2t}\sin st\right) = 4e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t \ ,$$

*substituindo* $c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t$ *na equação, obtém-se*

$$\begin{aligned} & (D^2+1)D(c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t) = e^2t\cos t \\ \iff\quad & (D^2+1)\left((2c_3+c_4)e^{2t}\cos t + (2c_4-c_3)e^{2t}\sin t\right) = e^2t\cos t \\ \iff\quad & (4(2c_3+c_4)+4(2c_4-c_3))e^{2t}\cos t + (4(2c_4-c_3)-4(2c_3+c_4))e^{2t}\sin t = e^2t\cos t \\ \iff\quad & \begin{cases} 4c_3 + 12c_4 &= 1 \\ 4c_4 - 12c_3 &= 0 \end{cases} \\ \iff\quad & \begin{cases} c_3 &= \frac{1}{40} \\ c_4 &= \frac{3}{40} \end{cases} \end{aligned}$$

*Logo,*

$$y(t) = \frac{1}{40}e^{2t}\cos t + \frac{3}{40}e^{2t}\sin t$$

*é uma solução particular. Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t) = c_0t + c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{40}e^{2t}\cos t + \frac{3}{40}e^{2t}\sin t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

(42) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

(a)
$$y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 0 \ ;$$

(b)
$$y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 1 + e^t \sin t \ ;$$

(c)
$$y^{(2)} - \dot{y} - 2y = 2e^{2t} - 2 \ ;$$

(d)
$$y^{(3)} - 2\pi y^{(2)} + \pi^2 \dot{y} = 2\pi^3 t \ ;$$

(e)
$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2\dot{y} = e^{-t} \cos t$$

.

(43) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y^{(3)} + \dot{y} = e^t \\ y(0) = 1 \ , \ \dot{y}(0) = 1 \ , \ y^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *Pela alínea (b) do exercício 41, a solução geral da equação diferencial é*
$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} e^t \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*As derivadas desta solução são*
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \tfrac{1}{2} e^t \\ y^{(2)}(t) &= -c_1 \cos t - c_2 \sin t + \tfrac{1}{2} e^t \ . \end{aligned}$$

*A condição inicial impõe que*
$$\begin{aligned} 1 &= y(0) &&= c_0 + c_1 + \tfrac{1}{2} \\ 1 &= \dot{y}(0) &&= c_2 + \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} &= y^{(2)}(0) &&= -c_1 + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

*donde se conclui que*
$$c_0 = \frac{1}{2} \ , \qquad c_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{1}{2} \ .$$

*Logo, a solução deste problema de valor inicial é*
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

(44) Determine a solução da equação linear escalar

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = b(t)$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$, quando
(a) $b(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
(b) $b(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
(c) $b(t) = e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

**Resolução:**

(a) *A equação homogénea pode ser escrita*

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \textit{ou seja} \quad D(D+1)^2 y = 0$$

*cuja solução geral é*

$$y(t) = c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *As derivadas desta solução são:*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \ . \end{aligned}$$

*No valor inicial tem-se*

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= -c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= c_1 - 2c_2 \ . \end{aligned}$$

*A condição inicial impõe que*

$$\left\{ \begin{aligned} c_0 + c_1 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 - 2c_2 &= 1 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned} \right.$$

*Logo, a solução do problema é*

$$y(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(b) *A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com* $b(t) = t$, *aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:*

- $t$ *é solução de* $D^2 y = 0$;
- *se* $y$ *é solução de* $(D^3 + 2D^2 + D)y = t$, *então*

  $$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = D^2 t = 0 \ ;$$

- *procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,*

  $$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \textit{ou seja} \quad D^3(D+1)^2 y = 0 \ ,$$

  *que é*

  $$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}} + c_3 t + c_4 t^2 \ ;$$

- *os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma soluçãoparticular da equação não homogénea;*

– *toma-se como candidata para solução particular uma função da forma*

$$y(t) = c_3 t + c_4 t^2$$

*a qual tem as seguintes derivadas*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_3 + 2c_4 t \\ y^{(2)}(t) &= 2c_4 \\ y^{(3)}(t) &= 0 \ ; \end{aligned}$$

– *os coeficientes $c_3$ e $c_4$ determinam-se substituindo na equação:*

$$\begin{aligned} & y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = t \\ \iff \ & 0 + 4c_4 + c_3 + 2c_4 t = t \\ \iff \ & 4c_4 + c_3 = 0 \ \text{ e } \ 2c_4 = 1 \\ \iff \ & c_3 = -2 \ \text{ e } \ c_4 = \tfrac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

*Obteve-se a solução particular*

$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*A solução geral da equação diferencial dada é*

$$y(t) = \underbrace{-2t + \tfrac{1}{2}t^2}_{\text{sol. particular}} + \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}_{\text{sol. geral da eq. hom.}} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -2 + t - c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= 1 + c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \ . \end{aligned}$$

*No valor inicial tem-se*

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= -2 - c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= 1 + c_1 - 2c_2 \ . \end{aligned}$$

*A condição inicial impõe que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_0 + c_1 &=& 0 \\ -2 - c_1 + c_2 &=& 0 \\ 1 + c_1 - 2c_2 &=& 1 \end{array} \right. \qquad \iff \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} c_0 &=& 4 \\ c_1 &=& -4 \\ c_2 &=& -2 \end{array} \right.$$

*Logo, a solução do problema é*

$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 + 4 - 4e^{-t} - 2te^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com $b(t) = e^t$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:*

– *$e^t$ é solução de $(D-1)y = 0$;*

– *se $y$ é solução de $(D^3 + 2D^2 + D)y = e^t$, então*

$$(D-1)(D^3 + 2D^2 + D)y = (D-1)e^t = 0 \ ;$$

– *procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,*

$$(D-1)(D^3 + 2D^2 + D)y = 0$$

*ou seja*

$$(D-1)D(D+1)^2 y = 0 \ ,$$

*que é*

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}} + c_3 e^t \ ;$$

- *os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma soluçãoparticular da equação não homogénea;*
- *toma-se como candidata para solução particular uma função da forma*

$$y(t) = c_3 e^t$$

*que tem as seguintes derivadas*

$$\dot{y}(t) = y^{(2)}(t) = y^{(3)}(t) = c_3 e^t \ ;$$

- *o coeficiente $c_3$ determina-se substituindo na equação:*

$$\begin{array}{ll} & y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = e^t \\ \iff & (c_3 + 2c_3 + c_3)e^t = e^t \\ \iff & c_3 = \frac{1}{4} \ . \end{array}$$

*Obteve-se a solução particular*

$$y(t) = \tfrac{1}{4}e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*A solução geral da equação diferencial dada é*

$$y(t) = \underbrace{\tfrac{1}{4}e^t}_{\textit{sol. part.}} + \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}_{\textit{sol. geral da eq. hom.}} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:*

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}(t) & = & \frac{1}{4}e^t - c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \\ y^{(2)}(t) & = & \frac{1}{4}e^t + c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \ . \end{array}$$

*No valor inicial tem-se*

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & \frac{1}{4} + c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) & = & \frac{1}{4} - c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) & = & \frac{1}{4} + c_1 - 2c_2 \ . \end{array}$$

*A condição inicial impõe que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{4} + c_0 + \ c_1 & = & 0 \\ \frac{1}{4} - c_1 + \ c_2 & = & 0 \\ \frac{1}{4} + c_1 - 2c_2 & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & -\frac{1}{4} \\ c_2 & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

*Logo, a solução do problema é*

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

(45) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(3)} - 2y^{(2)} + \dot{y} = -4 + 2t \\ y(0) = 1 \ , \ \dot{y}(0) = 0 \ , \ y^{(2)}(0) = 2 \ . \end{array} \right.$$

(46) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} = 0 \ .$$

(a) Determine a sua solução geral.
(b) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm solução convergente quando $t \to +\infty$.

**Resolução:**

(a) *O polinómio característico da equação é*

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$$

*cuja factorização em monómios é*

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

*(tendo reparado na raiz 0 e adivinhando a raiz -1.*
*A solução geral (real) da equação é*

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

*onde* $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$*.*

(b) *Para que uma solução seja convergente quando* $t \to +\infty$*, ela não pode envolver as funções* $\cos t$ *nem* $\sin t$*. Procuram-se então as condições iniciais em* $t = 0$ *que implicam que* $c_3$ *e* $c_4$ *sejam 0. Uma vez que*

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ \dot{y}(t) & = & -c_2 e^{-t} - c_3 \sin t + c_4 \cos t \\ y^{(2)}(t) & = & c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t \\ y^{(3)}(t) & = & -c_2 e^{-t} + c_3 \sin t - c_4 \cos t \end{array}$$

*os valores em* $t = 0$ *são*

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & c_1 + c_2 + c_3 \\ \dot{y}(0) & = & - c_2 + c_4 \\ y^{(2)}(0) & = & c_2 - c_3 \\ y^{(3)}(0) & = & - c_2 - c_4 \end{array}$$

*donde sai que*

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & y(0) + \dot{y}(0) - y^{(2)}(0) + y^{(3)}(0) \\ c_2 & = & -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) \\ c_3 & = & -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\ c_4 & = & \frac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0)) \ . \end{array}$$

*Para que a solução do problema de valor inicial seja convergente quando* $t \to +\infty$*, terá que ser*

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\ 0 & = & \frac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0)) \end{array}$$

*ou seja,*

$$\dot{y}(0) = -y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) \ .$$

*O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são convergentes quando* $t \to +\infty$ *é*

$$\{(y(0), \dot{y}(0), y^{(2)}(0), y^{(3)}(0)) = (a, b, -b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \ .$$

$\square$