

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

LEEC – PRIMAVERA 2003 – EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

TRANSFORMADA DE LAPLACE, SÉRIES DE FOURIER E EDP'S

Transformada de Laplace

(1) Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1. \end{cases}$$

Resolução: Seja $Y(s)$ a transformada de Laplace da solução $y(t)$. Aplicando a transformada de Laplace, a equação fica

$$\mathcal{L}\{y^{(2)}\} - 5\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 4Y(s) = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\iff (s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) - 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$\iff s^2Y(s) - 5sY(s) + 4Y(s) - s + 6 = \frac{1}{s-2}$$

$$\iff (s^2 - 5s + 4)Y(s) = \frac{1}{s-2} + s - 6$$

$$\iff Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2-5s+4)} + \frac{s-6}{s^2-5s+4}.$$

Para reconhecer esta função como a transformada de Laplace de uma combinação de funções elementares, decompõe-se em fracções simples.

Cálculos auxiliares: Quanto à primeira parcela de $Y(s)$, tem-se

$$s^2 - 5s + 4 = 0 \iff s = 1 \text{ ou } s = 4$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-4}$$

$$1 = A(s-2)(s-4) + B(s-1)(s-4) + C(s-1)(s-2).$$

Quando $s = 1$, obtém-se que $A = \frac{1}{3}$; quando $s = 2$, obtém-se que $B = -\frac{1}{2}$; quando $s = 4$, obtém-se que $C = \frac{1}{6}$. Logo,

$$\frac{1}{(s-2)(s^2-5s+4)} = \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{6}}{s-4}.$$

Quanto à segunda parcela de $Y(s)$, tem-se

$$\frac{s-6}{s^2-5s+4} = \frac{s-4-2}{(s-1)(s-4)} = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{(s-1)(s-4)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-4)} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-4}$$

$$1 = D(s-4) + E(s-1).$$

Quando $s = 1$, obtém-se que $D = -\frac{1}{3}$; quando $s = 4$, obtém-se que $E = \frac{1}{3}$. Assim,

$$\frac{s-6}{s^2-5s+4} = \frac{1}{s-1} + \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{2}{3}}{s-4}.$$

Continuação da resolução: De acordo com os cálculos auxiliares,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{6}}{s-4} + \frac{1}{s-1} + \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{2}{3}}{s-4} \\ &= \frac{2}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2} - \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \\ &= 2\mathcal{L}\{e^t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{4t}\} \end{aligned}$$

peço que

$$y(t) = 2e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t}.$$

□

Sabendo que $y = y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$y^{(2)} - 2\dot{y} + y = f(t)$$

(2) e que a transformada de Laplace de $y(t)$ é dada por

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2-1)(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2},$$

determine f e as condições iniciais de $y(t)$, ou seja, os valores de $y(0)$ e $\dot{y}(0)$.

Resolução:

Solução 1: Aplicando a transformada de Laplace, a equação fica

$$\mathcal{L}\{y^{(2)}\} - 2\mathcal{L}\{\dot{y}\} + Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\iff (s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\iff (s^2 - 2s + 1)Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\iff (s-1)^2 \left(\frac{2}{(s^2-1)(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2} \right) = \mathcal{L}\{f(t)\} + \dot{y}(0) + sy(0)$$

$$\iff \frac{2}{s+1} + 1 = \mathcal{L}\{f(t)\} + \dot{y}(0) + sy(0)$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{s+1} = \mathcal{L}\{f(t)\} & \text{donde se conclui que } 2e^{-t} = f(t) \\ 1 = \dot{y}(0) \\ 0 = y(0) \end{cases}$$

porque a transformada de Laplace de uma função não pode incluir termos da forma $a + bs$. Portanto,

$$\begin{cases} f(t) = 2e^{-t}, \\ \dot{y}(0) = 1 \quad e \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Solução 2: Sabendo que

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2-1)(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2},$$

pode-se calcular $y(t)$ desenvolvendo a expressão da direita em frações simples. Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned}(s^2 - 1)(s - 1) &= (s - 1)^2(s + 1) \\ \frac{2}{(s^2 - 1)(s - 1)} &= \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{(s - 1)^2} + \frac{C}{s + 1} \\ 2 &= A(s - 1)(s + 1) + B(s + 1) + C(s - 1)^2\end{aligned}$$

Quando $s = 1$, obtém-se que $B = 1$; quando $s = -1$, obtém-se que $C = \frac{1}{2}$.
Derivando a expressão acima,

$$0 = A(s - 1) + A(s + 1) + B + 2C(s - 1) ,$$

e avaliando, por exemplo, em $s = 1$, obtém-se que $A = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}Y(s) &= -\frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{2}{(s-1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^t\} \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} + 2\mathcal{L}\{te^t\}\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t .$$

Como

$$\dot{y}(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t ,$$

os valores em 0 são:

$$y(0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad e \quad \dot{y}(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 .$$

A função $f(t)$ pode ser calculada substituindo $y(t)$ na equação:

$$y^{(2)}(t) = \frac{7}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t ,$$

pelo que

$$\begin{aligned}&y^{(2)} - 2\dot{y} + y \\ &= \left(\frac{7}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t\right) - 2\left(\frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t\right) + \left(-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^t\right) \\ &= 2e^{-t} .\end{aligned}$$

□

Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} - 4\dot{y} + 4y = f(t) \\ y(0) = 0 , \quad \dot{y}(0) = 2 , \end{cases}$$

(3) onde

$$f(t) = \begin{cases} te^{2t} , & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ te^{2t} + (t - 1)e^{2(t-1)} , & \text{se } t \geq 1 . \end{cases}$$

Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$(4) \quad \begin{cases} y^{(2)} + 2\dot{y} + y = 2(t-3)H_3(t) \\ y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

onde

$$H_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 1, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

Séries de Fourier

Desenvolva em série de Fourier as seguintes funções:

(a) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

(b) $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos^2(x) - \sin^3(x)$.

Resolução:

(a) A série de Fourier da função f é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

onde

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \quad \text{para } n \geq 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \quad \text{para } n \geq 1.$$

Como f é uma função ímpar, todos os a_n 's são zero e

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) \\ &= \frac{2-2(-1)^n}{n\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de f é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi x).$$

Comentário: Como a função f é seccionalmente diferenciável em $[-1, 1]$, a sua série de Fourier converge em $[-1, 1]$ para

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-1, 0[\text{ ou } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in]-1, 0[\\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = \pm 1 \\ 1 & \text{se } x \in]0, 1[. \end{cases}$$

Nos pontos da forma $x = k \in \mathbb{Z}$, a série converge para 0 porque este valor é a média dos limites laterais nestes pontos da extensão de f a \mathbb{R} como função periódica de período 2:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1.$$

◇

(b) A série de Fourier da função f é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Uma vez que o desenvolvimento de Fourier é único, qualquer desenvolvimento que obtenhamos para f em termos das funções base 1, $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ será o desenvolvimento de Fourier de f . Ora tem-se

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

e, pela fórmula de DeMoivre,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^3) &= \operatorname{Im}(\cos(3x) + i \sin(3x)) \\ \iff 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x &= \sin(3x) \\ \iff 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x &= \sin(3x) \\ \iff \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x). \end{aligned}$$

Portanto o desenvolvimento de Fourier de f é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin(3x),$$

isto é, $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_n = 0$ para $n \neq 0, 2$ e $b_1 = -\frac{3}{4}$, $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_n = 0$ para $n \neq 1, 3$.

□

Desenvolva as seguintes funções em série de Fourier:

- (6) (a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{se } -1 \leq x < 0; \end{cases}$
 (b) $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin^4 x$;
 (c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$

- (7) Desenvolva a função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-x}$$
em série de senos.

Resolução: A série de senos da função f é da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

onde, para $n \geq 1$ se tem

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(\int_0^{\pi} e^{(-1+in)x} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(\left. \frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in} \right|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{-\pi}(-1)^n - 1}{-1+in} \right) \\ &= \frac{2n(1 - e^{-\pi}(-1)^n)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

Logo, a série de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - e^{-\pi}(-1)^n)}{\pi(1+n^2)} \sin(nx).$$

□

- (8) Seja ℓ um número real positivo. Desenvolva a função $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ \ell - x & \text{se } \frac{\ell}{2} < x \leq \ell \end{cases}$$
em série de co-senos.

Resolução: A série de co-senos da função f é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

onde, para $n \geq 0$ se tem

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Assim,

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}} x dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell - x) dx \right) = \frac{\ell}{2}$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\ell} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}} x \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\ell} \left(\frac{\ell x}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \Big|_0^{\frac{\ell}{2}} - \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{\ell}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\ell - x)\ell}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} - \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} -\frac{\ell}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \right) \\
 &= \frac{2}{\ell} \left(\frac{\ell^2}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right) \Big|_0^{\frac{\ell}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ell^2}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \right) \\
 &= \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right).
 \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n = 4k \text{ para algum inteiro } k \\ -1 & \text{se } n = 4k + 2 \end{cases}$$

tem-se

$$a_n = \begin{cases} -\frac{8\ell}{n^2\pi^2} & \text{se } n = 4k + 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto a série de co-senos de f é

$$\frac{\ell}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{8\ell}{(4k+2)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi x}{\ell}\right).$$

□

Desenvolva as seguintes funções em série de co-senos:

- (9) (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ para $x \in [0, 1]$;
 (b) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Desenvolva as seguintes funções em série de senos:

- (10) (a) $f(x) = 1$ para $x \in [0, 1]$;
 (b) $f(x) = (\pi - x)x$ para $x \in [0, \pi]$;
 (c) $f(x) = 55 - 40x$ para $x \in [0, 1]$;
 (d) $f(x) = x(x^2 - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

Comentário: As respostas às primeiras três alíneas deste exercício estão contidas nas resoluções dos exercícios 5, 17 e 13, respectivamente. ◇

Equações do calor, de Laplace e das ondas

(11) Seja c um parâmetro real positivo. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução do seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 1$).

Resolução: Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções da EDP da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x),$$

para as quais

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)X(x) = T^{(2)}(t)X(x) \quad e$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x).$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$T^{(2)}(t)X(x) = c^2 T(t)X^{(2)}(x) \iff \underbrace{\frac{T^{(2)}(t)}{T(t)}}_k = c^2 \underbrace{\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}}_k$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x , o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(1) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0, \forall t$).

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) = \frac{k}{c^2} X(x)$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{c}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{c}x} & \text{se } k > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k = 0 \\ X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-k}}{c}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c}x\right) & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Quando $k \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz a condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(1) = 0 \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Quando $k < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(1) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c}\right) = 0.$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\frac{\sqrt{-k}}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja,

$$k = -c^2 n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para $k < 0$, a solução geral de

$$T^{(2)}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = c_1 \cos(\sqrt{-kt}) + c_2 \sin(\sqrt{-kt}).$$

A condição inicial

$$T(0)X(x) = 0$$

impõe que seja $T(0) = 0$ para que a solução não seja identicamente nula. Quando $T(t)$ é uma combinação linear de \sin e \cos como acima, tem que então ser $c_1 = 0$.

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema de valor na fronteira conjugado com a primeira condição inicial:

$$u_n(t, x) = \underbrace{\sin(cn\pi t)}_{T(t)} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(t, x)$$

é uma solução formal.

Para que a solução mais geral da forma acima satisfaça a segunda condição inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

Como

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = cn\pi \cos(cn\pi t) \sin(n\pi x),$$

a condição fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n cn\pi \sin(n\pi x) = 1.$$

Para encontrar as constantes d_n adequadas, desenvolve-se a função 1 em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo $[-1, 1]$ como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier, trabalho esse que foi feito no exercício 5 onde se encontrou que a série de senos para a função 1 é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi x).$$

Logo, os d_n 's devem ser 0 quando n é par e devem satisfazer

$$d_n cn\pi = \frac{4}{n\pi}$$

quando n é ímpar.

Conclui-se que a série que dá a solução formal do problema posto é

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4}{cn^2\pi^2} \sin(cn\pi t) \sin(n\pi x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{c(2n+1)^2\pi^2} \sin(c(2n+1)\pi t) \sin((2n+1)\pi x).$$

□

(12) Use o método de separação de variáveis para determinar a solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = \sin(2y) \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Resolução: Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções do problema da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação obtém-se, para $X(x)Y(y) \neq 0$,

$$X^{(2)}(x)Y(y) + X(x)Y^{(2)}(y) = 0 \iff \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = -\frac{Y^{(2)}(y)}{Y(y)}.$$

Conclui-se que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} = k = -\frac{Y^{(2)}(y)}{Y(y)}.$$

Para que a condição na fronteira

$$X(x)Y(0) = X(x)Y(\pi) = 0$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$Y(0) = Y(\pi) = 0.$$

A equação

$$Y^{(2)}(y) + kY(y) = 0$$

só tem soluções não identicamente nulas que verifiquem a condição fronteira $Y(0) = Y(\pi) = 0$ se $k > 0$. Nesse caso, a solução geral é

$$Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{k}y) + c_2 \sin(\sqrt{k}y).$$

A condição $Y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$ e a condição $Y(\pi) = 0$ impõe

$$\sin(\sqrt{k}\pi) = 0 \iff k = n^2 \text{ para algum } n \text{ inteiro}.$$

Para que a solução não seja identicamente nula, tem que ser $n \neq 0$ e claramente basta considerar $n > 0$. A solução geral da equação

$$X^{(2)}(x) - n^2 X(x) = 0$$

é

$$X(x) = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}.$$

Para uma solução não identicamente nula, a condição na fronteira $X(0)Y(y) = 0$ implica

$$X(0) = 0 \iff c_1 + c_2 = 0 \iff c_2 = -c_1$$

pelo que

$$X(x) = 2c_1 \left(\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \right) = 2c_1 \sinh(nx) .$$

Obtêm-se assim as seguintes soluções que verificam todas as condições na fronteira excepto possivelmente a que foi imposta para $x = \pi$:

$$u_n(x, y) = \sinh(nx) \sin(ny), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

definidas para $0 \leq x \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$.

Por linearidade obtem-se a solução formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x, y) .$$

Para que esta série satisfaça a condição fronteira que resta devemos ter

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(\pi, y) &= \sin 2y \\ \iff \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh(n\pi) \sin(ny) &= \sin 2y . \end{aligned}$$

Conclui-se que $d_n = 0$ para $n \neq 2$ e que

$$d_2 = \frac{1}{\sinh(2\pi)} .$$

Isto é, a solução do problema do enunciado é

$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh(2\pi)} \sinh(2x) \sin(2y) .$$

□

Considere a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde α é um parâmetro real positivo, $t \geq 0$ e $x \in [0, L]$. Uma solução *estacionária* da equação do calor é uma solução que não depende do tempo, t .

- (a) Mostre que todas as soluções estacionárias da equação do calor são lineares em x , i.e., são funções da forma

$$u(x) = ax + b.$$

- (b) Determine uma solução estacionária para a equação do calor com a seguinte condição na fronteira:

$$(13) \quad u(t, 0) = T_1 \quad \text{e} \quad u(t, L) = T_2.$$

- (c) Ache uma solução da equação do calor (verificando a equação diferencial para $0 < x < L$) com as seguintes condições de fronteira e inicial

$$\begin{cases} u(0, x) = 75 \\ u(t, 0) = 20, \quad u(t, 1) = 60. \end{cases}$$

Sugestão: Considere soluções da forma

$$u(t, x) = v(x) + w(t, x),$$

onde $v(x)$ é uma solução estacionária do problema com condição na fronteira:

$$u(t, 0) = 20 \quad \text{e} \quad u(t, 1) = 60.$$

Resolução:

- (a) Seja $u(x)$ uma solução estacionária da equação do calor. Substituindo $u(x)$ na equação, obtém-se

$$0 = \alpha^2 u''(x)$$

cujas soluções gerais são

$$u(x) = c_1 + c_2 x,$$

que é uma função linear.

- (b) Procura-se os coeficientes c_1 e c_2 tais que a correspondente solução estacionária, $u(x) = c_1 + c_2 x$, satisfaça

$$\begin{cases} u(0) = c_1 = T_1 \\ u(L) = c_1 + c_2 L = T_2. \end{cases}$$

A solução deste sistema linear é

$$\begin{cases} c_1 = T_1 \\ c_2 = \frac{T_2 - T_1}{L}. \end{cases}$$

Encontra-se então a seguinte solução estacionária para a equação do calor com a condição na fronteira dada:

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x.$$

- (c) De acordo com a sugestão, procura-se uma solução da forma

$$u(t, x) = v(x) + w(t, x),$$

onde $v(x)$ é uma solução estacionária do problema da alínea (b) tomando $T_1 = 20$, $T_2 = 60$ e $L = 1$. Então

$$v(x) = 20 + 40x ,$$

e $w(t, x) = u(t, x) - v(x)$ terá de ser uma solução do problema homogêneo

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 . \end{cases}$$

Aplica-se o método de separação de variáveis na pesquisa de soluções de (*): procura-se soluções da forma

$$T(t)X(x) ,$$

para as quais

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t)X(x) = \dot{T}(t)X(x) \quad e$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) .$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$\dot{T}(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X^{(2)}(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_k = \alpha^2 \underbrace{\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}}_k$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x , o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \quad \text{com } c \in \mathbb{R} .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - \frac{k}{\alpha^2} X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{k}}{\alpha} x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{k}}{\alpha} x} & \text{se } k > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k = 0 \\ X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha} x\right) & \text{se } k < 0 . \end{cases}$$

Para que a condição homogênea na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(1) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0, \forall t$). Quando $k \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(1) = 0 \implies c_1 = c_2 = 0 .$$

Quando $k < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(1) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{\alpha}\right) = 0 .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\frac{\sqrt{-k}}{\alpha} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja,

$$k = -n^2\pi^2\alpha^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema homogéneo (*):

$$w_n(t, x) = \underbrace{e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}}_{T(t)} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série uniformemente convergente da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t, x)$$

é ainda solução.

Obtêm-se assim as seguintes funções que verificam todas as condições do problema posto excepto a condição inicial:

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t, x).$$

Finalmente, impondo a condição inicial, $u(0, x) = 75$, terá que ser

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(0, x) = 75,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = 55 - 40x.$$

Para encontrar as constantes b_n adequadas, desenvolve-se a função $55 - 40x$ em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo $[-1, 1]$ como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier. Os coeficientes a_n de uma função ímpar anulam-se e os coeficientes b_n , para $n \geq 1$, são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 (55 - 40x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \left[-55 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + 40x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} - 40 \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 \\ &= 2 \left[-55 \frac{(-1)^n}{n\pi} + 55 \frac{1}{n\pi} + 40 \frac{(-1)^n}{n\pi} \right] \\ &= \frac{110 - 30(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução formal do problema posto é

$$20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{110-30(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \sin(n\pi x) .$$

□

Comentário: O problema anterior diz respeito à evolução da distribuição de temperatura numa barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$. No instante inicial todos os pontos da barra estão à mesma temperatura (75) e as temperaturas nas extremidades são mantidas constantes, igual a 20 em $x = 0$ e igual a 60 na extremidade $x = 1$. ♦

Determine a solução do seguinte problema para a equação do calor:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 75 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 2$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 2$).

Seja c um parâmetro real positivo. Determine a solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação das ondas:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$ (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 1$).

Use o método de separação de variáveis para determinar uma solução do seguinte problema para a equação de Laplace:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Método de separação de variáveis

(a) Determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0, x) = (\pi - x)x .$$

Resolução:

(a) Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções da EDP da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x) ,$$

para as quais

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t)X(x) = \dot{T}(t)X(x) \quad e$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) .$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) - T(t)X(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_k = \underbrace{\frac{X^{(2)}(x)}{X(x)}}_k - 1$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x , o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \quad \text{com } c \in \mathbb{R} .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - (k+1)X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{k+1}x} + c_2 e^{-\sqrt{k+1}x} & \text{se } k+1 > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k+1 = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k-1}x) + c_2 \sin(\sqrt{-k-1}x) & \text{se } k+1 < 0 . \end{cases}$$

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(\pi) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0, \forall t$). Quando $k+1 \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(\pi) = 0 \implies c_1 = c_2 = 0 .$$

Quando $k+1 < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(\pi) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin(\sqrt{-k-1}\pi) = 0 .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\sqrt{-k-1}\pi = n\pi , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja,

$$k = -1 - n^2 , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema de valor na fronteira dado:

$$u_n(t, x) = \underbrace{e^{-(1+n^2)t}}_{T(t)} \underbrace{\sin(nx)}_{X(x)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita destas soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, x)$$

é uma solução formal.

(b) Para que a solução geral da forma acima satisfaça a condição inicial

$$u(0, x) = (\pi - x)x,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(0, x) = (\pi - x)x,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = (\pi - x)x.$$

Para encontrar as constantes b_n adequadas, desenvolve-se a função $(\pi - x)x$ em série de senos. Isso é equivalente a estender esta função ao intervalo $[-\pi, \pi]$ como função ímpar, e desenvolver a extensão em série de Fourier. Os coeficientes da série são

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)x \sin(nx) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx \\ &= 2 \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

(onde as primitivas foram obtidas por primitivação por partes, uma vez no primeiro integral e duas no segundo). Logo, a solução pretendida é

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{8}{n^3 \pi} e^{-(1+n^2)t} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 \pi} e^{-(1+(2n+1)^2)t} \sin((2n+1)x). \end{aligned}$$



(18) (a) Determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = \sin 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$).

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0, x) = 3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x) + \sin x .$$

Resolução:

(a) A solução geral deste problema com condições não homogêneas pode ser obtida somando a uma solução particular do problema não homogêneo a solução geral do problema homogêneo associado.

Vai-se procurar uma solução particular entre as soluções estacionárias, i.e., que não dependem do tempo t . Em resumo, procura-se escrever a solução geral na forma

$$u(t, x) = v(x) + w(t, x) ,$$

onde $v(x)$ é uma solução particular estacionária do problema dado e $w(t, x)$ é a solução geral do problema homogêneo

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 . \end{cases}$$

Solução particular estacionária:

Substituindo $v(x)$ na equação, obtém-se

$$0 = v'' + v$$

cujas soluções gerais são

$$v(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Para que a condição em $x = 0$, $v(0) = 0$, seja satisfeita, tem que ser $c_1 = 0$. Depois para que a condição em $x = 1$, $v(1) = \sin 1$, seja satisfeita, tem que ser $c_2 = 1$. Conclui-se que

$$v(x) = \sin x$$

é uma solução particular (estacionária) do problema não homogêneo.

Solução geral homogênea:

Pelo método de separação de variáveis, procura-se soluções do problema homogêneo

(*) da forma

$$w(t, x) = T(t)X(x) ,$$

para as quais

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t)X(x) = \dot{T}(t)X(x) \quad e$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(t)X(x) = T(t)X''(x) .$$

Substituindo na equação, e assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, fica

$$\dot{T}(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \iff \underbrace{\frac{\dot{T}(t)}{T(t)}}_k = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_k + 1$$

onde cada um dos membros tem que ser uma constante real k (porque o membro esquerdo não depende de x , o membro direito não depende de t e eles têm que ser iguais).

A solução geral de

$$\dot{T}(t) = kT(t)$$

é

$$T(t) = ce^{kt} \quad \text{com } c \in \mathbb{R} .$$

A solução geral de

$$X^{(2)}(x) - (k - 1)X(x) = 0$$

é, consoante os casos,

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\sqrt{k-1}x} + c_2 e^{-\sqrt{k-1}x} & \text{se } k - 1 > 0 \\ X(x) = c_1 + c_2 x & \text{se } k - 1 = 0 \\ X(x) = c_1 \cos(\sqrt{1-k}x) + c_2 \sin(\sqrt{1-k}x) & \text{se } k - 1 < 0 . \end{cases}$$

Para que a condição na fronteira,

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 ,$$

seja satisfeita por uma solução não identicamente nula, tem que ser

$$X(0) = X(1) = 0$$

(já que, se $X(0) \neq 0$ ou $X(1) \neq 0$, teria que ser $T(t) = 0, \forall t$). Quando $k - 1 \geq 0$, a única solução $X(x)$ que satisfaz esta condição na fronteira é a solução identicamente nula, ou seja, nesses casos,

$$X(0) = X(1) = 0 \implies c_1 = c_2 = 0 .$$

Quando $k - 1 < 0$, a condição $X(0) = 0$ impõe $c_1 = 0$ e depois a condição $X(1) = 0$ impõe a uma solução não identicamente nula que

$$\sin(\sqrt{1-k}) = 0 .$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma solução não identicamente nula desde que

$$\sqrt{1-k} = n\pi , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja,

$$k = 1 - n^2\pi^2 , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtêm-se assim todas as seguintes soluções para o problema homogéneo (\star):

$$w_n(t, x) = \underbrace{e^{(1-n^2\pi^2)t}}_{T(t)} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{X(x)} , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

definidas para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$. Por linearidade, qualquer combinação linear finita desta soluções é ainda solução e, mais geralmente, qualquer série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t, x)$$

é uma solução formal.

Solução geral:
$$\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(t, x) .$$

(b) Para que a solução geral da forma acima satisfaça a condição inicial

$$u(0, x) = 3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x) + \sin x ,$$

tem que ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(0, x) = 3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x) ,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = 3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x) .$$

As constantes b_n adequadas são

$$b_2 = 3 , \quad b_4 = -7 , \quad \text{todos os outros } b_n \text{'s são zero .}$$

(A função $3 \sin(2\pi x) - 7 \sin(4\pi x)$ já é dada em série de Fourier.)

A solução pretendida é

$$\sin x + 3e^{(1-4\pi^2)t} \sin(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t} \sin(4\pi x) .$$

□

(19)

- (a) Calcule a série de Fourier da função $f(x) = x(x^2 - 1)$ para $x \in [-1, 1]$.
 (b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 . \end{cases}$$

- (c) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(0, x) = \sin(\pi x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x(x^2 - 1) .$$

(20)

- (a) Calcule a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right| .$$

- (b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 . \end{cases}$$

- (c) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $u(0, x) = \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right)$.