Semana 1. Funções elementares.

1.1 Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

a) $(5 + i6) + (2 - 3i)$.

b) $(5 + i6)(2 - 3i)$.

c) $(2 + i3)^3$.

d) $(2 - i3)^{-1}$.

e) $\dfrac{3 + 4i}{2 + i3}$.

1.2 Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar $z = \rho e^{i\theta}$:

a) $\sqrt{2}$.

b) -2.

c) $1 + i\sqrt{3}$.

d) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n, \ n \in \mathbb{Z}$.

1.3 Mostre que

a) $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

b) $|w + z| \leqslant |w| + |z|$.

c) $||w| - |z|| \leqslant |w + z|$.

1.4 Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z + \pi| = \sqrt{2}\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : z = 2i + 3e^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| \leqslant \sqrt{5}\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : z = i + (2 - i)t, \qquad t \in \mathbb{R}\}$.

e) $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| \leqslant |z - i|\}$. (R: Interior da circunferência de centro em $z = -\frac{i}{3}$ e raio $\frac{2}{3}$).

1.5 Calcule todas as soluções das equações

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) $(1 + z)^3 = 1$.

c) $e^z = -1$.

d) $|e^{i\theta} - 1| = 2$, $\theta \in \mathbb{R}$ (interprete geometricamente).

e) $\cos z = 2$.

1.6 Utilizando as fórmulas de Euler, determine expressões para $\cos(3\phi)$ e $\mathrm{sen}(3\phi)$ em termos de $\cos(\phi)$ e $\mathrm{sen}(\phi)$.

1.7 Estabeleça as seguintes identidades (usando a relação entre $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ e e^z dada pela fórmula de Euler: $e^z = \cos z + i\operatorname{sen} z$)

a) $\cos(iz) = \cosh(z)$.

b) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

c) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$.

1.8 Calcule o valor principal (i.e., tomando $\log z = \log|z| + i\theta$ com $\theta \in]-\pi, \pi]$) de:

a) $\log(-1)$.

b) i^i.

c) $(1+i)^{1-i}$.

1.9 Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\arctan z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}.$$

Sugestão: Use as fórmulas de Euler na relação $\tan w = z$ para determinar e^w em função de z.

Semana 2. Diferenciabilidade.

2.1 Determine as partes real e imaginária das seguintes funç ões de variável complexa, e indique o conjunto de pontos do plano complexo onde são contínuas:

a) $z\,|z|$.

b) $\dfrac{1}{2z+3i}$

c) $\dfrac{1}{\cos z}$.

2.2 Mostre que as funções de variável complexa definidas por $f(x+iy) = x - 2y + i(2x+y)$ e $g(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$, são diferenciáveis no sentido complexo em todo o $\mathbb{C}$, e escreva-as como função da variável complexa z.

2.3 Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde possuem derivada:

a) $ze^{\bar{z}}$.

b) $\overline{z}(|z|^2 - 2)$.

c) $\dfrac{z+2}{z+i}$.

d) $\dfrac{1}{z} - \bar{z}$.

2.4 Mostre que $u = x^2 + xy - y^2$ é uma função harmónica. Poderá existir uma função diferenciável cuja parte real seja $u(x,y) = e^{-y}x + e^{x}y$?

2.5 Determine a função harmónica conjugada v, com $v(0,1) = 0$, para as seguintes funções u:

a) $u(x,y) = x^2 + xy - y^2$.

b) $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^3), \qquad z = x + iy$.

c) $u(x,y) = e^{-y}\cos x$

d) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

2.6 Seja f uma função analítica que verifica, num aberto conexo D , $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$. Mostre que f é constante em D (sugestão: mostre que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes enquanto funções das variáveis $x,\ y$).

2.7 Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada nesse ponto.

2.8 Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = 2\log\frac{\rho}{2} + i2\theta\ ,$$

com $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $h'(z)$.

Semana 3. Integração no plano complexo.

3.1 Calcule, para as curvas Γ e funções f indicadas, os integrais $\int_\Gamma f(z)dz$:

a) $f(z) = e^z$, Γ é o segmento de recta entre $z = i$ e $z = 1$, com esta orientação .

b) $f(z) = e^z$, Γ é constituído pelos segmentos dos eixos coordenados entre os pontos anteriores com a mesma orientação .

c) $f(z) = \dfrac{\overline{z} - 1}{z}$, Γ é o semicírculo $z = re^{i\theta}$, $\;r > 0$, $\;0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, percorrido no sentido convencional (anti-horário).

3.2 Justifique que a função $f(z) = \operatorname{sen} z \; e^{\cos z}$ é diferenciável e calcule os integrais $\int_\Gamma f(z)dz$ para as curvas Γ indicadas no exercício anterior.

3.3 Calcule os seguintes integrais (as curvas supõem-se percorridas no sentido convencional):

a) $\displaystyle\oint_\Gamma e^{\cos^2 z}\, dz$, onde Γ é a curva $|z| = 1$.

b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{z + \pi/2}\, dz$, onde Γ é a curva $|z| = \pi$.

3.4 Calcule os seguintes integrais (as curvas supõem-se percorridas no sentido convencional):

a) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z\,(z - i)}\, dz$, onde Γ é a elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$.

b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z - i)^{10}} dz$.

3.5 Seja $f(z) = \dfrac{z \cos z}{z^2 + a^2}$. Determine todos os valores possíveis do integral $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$, onde Γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular contida no domínio de f e $a \in \mathbb{R}$.

Observação : Deve incluir ambos os sentidos de percurso de Γ.

3.6 a) Mostre que se existem $M > 0$ e um inteiro n tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| > |z_0|$, então f é um polinómio de grau $\leq n$.

b) Seja f uma função inteira e limitada. Mostre que então f é constante. (Sugestão.: Utilize as fórmulas integrais de Cauchy).

Semana 4. Séries.

4.1 Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z-\sqrt{2}i\right)^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{Z}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n!)^2}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ onde $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar.} \end{cases}$

4.2 Para que valores de z é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

4.3 Integre a série de MacLaurin de $f(s) = 1/(1+s^2)$ sobre uma curva interior ao círculo de convergência, desde $s=0$ até $s=z$, de modo a obter a representação [1]

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \qquad (|z|<1).$$

Mostre que a função

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\arctan z}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é analítica no domínio $|z| < 1$.

4.4 Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$ nas seguintes regiões:

a) $0 < |z-1| < 2$.

b) $|z-1| > 2$.

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

$$\text{a) } \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz \ ; \quad \text{b) } \oint_{|z-1|=3} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}\, dz \ .$$

[1] Considere um ramo tal que $\arctan 0 = 0$.

4.5 Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$. *Sem calcular os respectivos coeficientes*, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

4.6 Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função

$$g(z) = \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}},$$

e calcule

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}} \right) dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida no sentido positivo.

4.7 Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, determine os raios de convergências de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ e de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$.

Semana 5. Teorema dos resíduos.

5.1 Classifique as singularidades das seguintes funções e determine os respectivos resíduos:

a) $\dfrac{1}{(z^2+2)^2}$

b) $\dfrac{z^2+1}{1-z^4}$

c) $\dfrac{z-\operatorname{sen} z}{z^5}$

d) $z^4 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$

e) $\dfrac{z-\pi/2}{\cos z}$

f) $\dfrac{1}{e^z-2i}$

5.2 Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2-1)}\, dz$.

b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2\,(\pi-z)}\, dz$.

c) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{1}{\operatorname{sen} z}\, dz$.

5.3 Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}+\cos(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$

5.4 Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos:

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{12}\pi.$

5.5 Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos:

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \; dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{sen}\, x}{(x^2+1)} \; dx = \frac{\pi}{e}.$

5.6 Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ possui em z_0 uma singularidade removível caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$ caso contrário.

5.7 Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$Res(f, z_0) = h(z_0)/g'(z_0).$$

5.8 Seja $f(z) = \dfrac{z\mathrm{sen}\,(z)}{\cos(z) - 1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z-4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

(a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $z\,\mathrm{sen}(z)$ em potências de $z - 2\pi$.

(b) Determine o interior da região de convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k (z-4i)^{k-1}}$.

(c) Classifique, justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.

(d) Calcule os valores possíveis de $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)dz$, onde Γ é uma curva simples, fechada e seccionalmente regular, contida na região

$$\{z \in \mathbb{C} : -3\pi < \mathrm{Re}(z) < 3\pi\} \cap D(f)$$

e tal que os pontos $\pm 2\pi$ estão contidos na região delimitada por Γ.

5.9 Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4+1}{z^2\,(2z^2+5z+2)}\, dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorrida no sentido positivo.

Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$