Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 1 – VERSÃO A – 28/3/2003 – RESOLUÇÃO

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 2 de Abril, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} \;,\; k=0,1,\ldots,n-1 \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \;,\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dz$$ (fórmulas integrais de Cauchy)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dz$$ (coeficientes das séries de Taylor e de Laurent)

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$ (resíduo num pólo de ordem n)

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2	
3(a)	
3(b)	
3(c)	
3(d)	
4	
total	

Nº:

Sala: ______________

Nome: ____

(1) Considere a função

$$f(x+iy) = y^2 + ixy \ .$$

(a) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é diferenciável.

Resolução: *As partes real e imaginária de f são $u(x,y) = y^2$ e $v(x,y) = xy$. Como u e v são funções de classe C^1, a função f é diferenciável num ponto $z = x+iy$ se e só se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em (x,y). Como*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 &= x \\ y &= -2y \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \ ,$$

conclui-se que f só é diferenciável na origem. □

(b) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é analítica.

Resolução: *f é analítica num ponto z_0 se for diferenciável em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0. Como se viu na alínea (a) que f só é diferenciável num ponto, não há qualquer conjunto aberto não vazio onde f seja diferenciável, pelo que f não é analítica em qualquer ponto.* □

(2) Calcule $\int_\gamma |z|\, dz$ onde γ é a circunferência de centro 0 e raio 2 percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução: *Escolhendo a parametrização de γ dada por $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, por definição de integral complexo, obtém-se*

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_0^{2\pi} |z(t)| z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{it}\, dt = \left[4e^{it}\right]_0^{2\pi} = 0\ .$$

Alternativa:
A função integranda $|z|$ não é analítica, mas como sobre γ se tem $|z| = 2$, a integranda coincide aí com a função constante igual a 2, a qual é analítica. Portanto, pode-se concluir pelo teorema de Cauchy que

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_\gamma 2\, dz = 0\ .$$

□

(3) Seja f a função definida por $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

Resolução: *Como $z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i$, pode-se escrever $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$. As singularidades de f são os zeros do denominador: i e $-i$. Cada uma destas duas singularidades é um pólo simples pois os limites*

$$\lim_{z\to i}[(z-i)f(z)] = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{-i}{2e}$$

e

$$\lim_{z\to -i}[(z+i)f(z)] = \lim_{z\to -i} \frac{e^{iz}}{z-i} = \frac{ie}{2}$$

existem finitos e diferentes de zero. □

(b) Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo $D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho \leq R\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, de raio $R > 1$, percorrida no sentido positivo.

Resolução: *Apenas o pólo i está na região limitada pela curva γ_R. Pelo teorema dos resíduos,*

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_i f\ .$$

Coincidindo o resíduo de f em i com o limite calculado em (a),

$$\mathrm{Res}_i f = \lim_{z\to i}[(z-i)f(z)] = \frac{-i}{2e}\ ,$$

conclui-se que o integral pedido vale $\frac{\pi}{e}$. □

(c) Mostre que

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{R\pi}{R^2-1}\ ,$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ contida em γ_R.

Resolução: *O módulo do integral é menor ou igual ao produto de um majorante M do módulo da função integranda pelo comprimento L do caminho. O comprimento da semi-circunferência Γ_R de raio R é $L = \pi R$. A integranda é majorada por*

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|} \leq \frac{e^{-\mathrm{Im} z}}{|z^2|-1} \leq \frac{1}{R^2-1}\ ,$$

porque sobre Γ_R tem-se $|z| = R$ e $\mathrm{Im} z \geq 0$. Tomando então $M = \frac{1}{R^2-1}$, obtém-se a desigualdade

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| \leq M \cdot L = \frac{R\pi}{R^2-1}\ .$$

□

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx \ .$$

Resolução: *Para qualquer raio* $R > 1$ *tem-se*

$$\frac{\pi}{e} = \oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx \ .$$

Pela estimativa da alínea (b), conclui-se que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 0$ *pois em módulo estes integrais estão abaixo da função* $\frac{R\pi}{R^2-1}$ *a qual tende para zero quando* R *tende para infinito porque o grau do polinómio em* R *no denominador é maior do que o do numerador. Então no limite* $R \to +\infty$ *da equação acima obtém-se*

$$\frac{\pi}{e} = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx \ .$$

Como $\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)$, *conclui-se que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e} \ .$$

□

(4) Determine a expressão sintética da função $f(z)$ que tem série de potências

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{(z-1)^k}{2^k} = 1 + 2\frac{z-1}{2} + 3\frac{(z-1)^2}{2^2} + 4\frac{(z-1)^3}{2^3} + \dots$$

válida no disco $|z-1| < 2$.

Resolução: *Uma vez que a convergência uniforme de uma série de potências permite derivar a série derivando termo a termo, obtém-se para* $|z-1| < 2$*:*

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{(z-1)^k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}\frac{(z-1)^{k+1}}{2^k} \\ &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{k+1}}{2^k} \\ &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{+\infty}2\frac{(z-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{d}{dz}2\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \frac{d}{dz}2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{d}{dz}2\frac{\frac{z-1}{2}}{1-\frac{z-1}{2}} \\ &= \frac{d}{dz}\frac{2z-2}{3-z} \\ &= \frac{4}{(3-z)^2}\ , \end{aligned}$$

onde na antepenúltima igualdade usou-se o resultado da soma de uma série geométrica de razão $\frac{z-1}{2}$. □