Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 1 – 28 DE MARÇO DE 2003 – 13:10-14H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 2 de Abril, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\,dz \qquad \text{(fórmulas integrais de Cauchy)}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\,dz \qquad \text{(coeficientes das séries de Taylor e de Laurent)}$$

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z - z_0)^n f(z)\right] \qquad \text{(resíduo num pólo de ordem n)}$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2	
3(a)	
3(b)	
3(c)	
3(d)	
4	
total	

Nº:

Sala: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a função
$$f(x+iy) = x^2 - ixy \ .$$

(a) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é diferenciável.

(b) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é analítica.

(2) Calcule $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\,dz$ onde γ a circunferência de centro 0 e raio 2 percorrida uma vez no sentido positivo.

(3) Seja f a função definida por $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Calcule $\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo $D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \rho \le R\ ,\ 0 \le \theta \le \pi\}$, de raio $R > 2$, percorrida no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,dz \right| \le \frac{R\pi}{R^2-4}\ ,$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$ contida em γ_R.

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx \ .$$

(4) Determine a expressão sintética da função $f(z)$ que tem série de potências

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{(z-2)^k}{2^k} = 1 + 2\frac{z-2}{2} + 3\frac{(z-2)^2}{2^2} + 4\frac{(z-2)^3}{2^3} + \dots$$

válida no disco $|z-2| < 2$.