

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 1 – 28 DE MARÇO DE 2003 – 13:10-14H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 2 de Abril, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dz \quad (\text{fórmulas integrais de Cauchy})$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dz \quad (\text{coeficientes das séries de Taylor e de Laurent})$$

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \quad (\text{resíduo num pólo de ordem } n)$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2	
3(a)	
3(b)	
3(c)	
3(d)	
4	
total	

Nº:

Sala: _____

Nome: _____

(1) Considere a função

$$f(x + iy) = xy + iy^2 .$$

(a) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é diferenciável.

(b) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é analítica.

(2) Calcule $\int_{\gamma} |z| dz$ onde γ é a circunferência de centro 0 e raio 4 percorrida uma vez no sentido positivo.

(3) Seja f a função definida por $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de f .

(b) Calcule $\oint_{\gamma_R} f(z) dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo $D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, de raio $R > 1$, percorrida no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \frac{R\pi}{(R^2 - 1)^2},$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = R e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ contida em γ_R .

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx .$$

(4) Determine a expressão sintética da função $f(z)$ que tem série de potências

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{(z+1)^k}{2^k} = 1 + 2 \frac{z+1}{2} + 3 \frac{(z+1)^2}{2^2} + 4 \frac{(z+1)^3}{2^3} + \dots$$

válida no disco $|z+1| < 2$.