Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RECUPERAÇÃO DO TESTE 1 – 12/JUNHO/2003 – 18H10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 20 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dz$$ (fórmulas integrais de Cauchy)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dz$$ (coeficientes das séries de Taylor e de Laurent)

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$ (resíduo num pólo de ordem n)

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2	
3(a)	
3(b)	
3(c)	
3(d)	
4	
total	

Nº:

Sala: ____________

Nome: ______________________________

(1) Considere a função
$$f(z) = 2|z|^2 - \overline{z}^2 \ .$$

(a) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é diferenciável.

(b) Determine todos os pontos do plano complexo onde f é analítica.

(2) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sin e^z \, dz$ onde γ é a elipse dada pela equação $(\mathrm{Re}z)^2 + 4(\mathrm{Im}z)^2 = 4$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(3) Seja γ_R a fronteira da região $D_R = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < R\ ,\ 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$, com $R > 1$, à qual se atribui a orientação positiva. Seja $g(z) = \dfrac{z}{z^3+1}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de g.

(b) Desenvolva g em série de Laurent na região $|z| < 1$.

(c) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} g(z)\ dz\ .$$

(d) Calcule o integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx \; .$$

(4) Seja $p(z)$ um polinómio de grau n com n raízes distintas $z_1, ..., z_n$ $(n \geq 1)$, e seja $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Mostre que:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{Res}_{z_k} f}{z - z_k} \; .$$