Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 3 – VERSÃO A – 6/JUNHO/2003 – RESOLUÇÃO

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das cinco alíneas vale 4 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 11 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas para Transformadas de Laplace

Sendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \ , \ \mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \ .$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ , \ \mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \ \mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = e^{-cs} \ .$$

Fórmulas para Séries de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ , \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx \ .$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \ , \ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \ , \ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \ .$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3	
total	

Nº:

Sala: ____________________

Nome: ____________________

(1) (a) Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t\ , & \text{se } 0 \leq t \leq 1\ , \\ 1\ , & \text{se } t > 1\ . \end{cases}$$

Resolução: *Como se pode escrever* $f(t) = t - (t-1)H_1(t)$*, a sua transformada de Laplace é*

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}\ .$$

□

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} + y = f(t) \\ \dot{y}(0) = 1 \ , \ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

onde $f(t)$ é a função da alínea anterior.

Resolução: *Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, onde $y(t)$ é a solução do PVI. Aplica-se a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e usa-se o resultado da alínea anterior:*

$$\begin{aligned} & (s^2+1)Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} \\ \iff \quad & Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+1)} \\ \iff \quad & Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) \ . \end{aligned}$$

A função contínua com esta transformada de Laplace e definida para $t \geq 0$ é

$$y(t) = \cos t + t - H_1(t)\left(t - 1 - \sin(t-1)\right) \ .$$

$\square$

(2) (a) Ache o desenvolvimento em série senos da função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.

Resolução: *A série de senos de g é a restrição ao intervalo $[0,1]$ da série de Fourier da sua extensão ímpar $\bar{g} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\bar{g}(x) = 1$ para $x \in [0,1]$ e $\bar{g}(x) = -1$ para $x \in [-1,0[$. Essa série é dada por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} \bar{g}(x) \sin n\pi x \, dx \\ &= 2\int_0^1 \sin n\pi x \, dx \\ &= 2\left[\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \ , & n \text{ ímpar} \\ 0 \ , & n \text{ par} \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a série de senos de g é

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \frac{\sin n\pi x}{n} \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

$\square$

(b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $t > 0$ e $0 < x < 1$) do seguinte problema para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \\ u(t,0) = u(t,1) = 5 \ , \\ u(0,x) = 7 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Para $u(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$, a equação diferencial fica*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \dot{T}(t)X(x) = T(t)X^{(2)}(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = k = \frac{X^{(2)}(x)}{X(x)} \ , \quad \text{com } k \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Para que haja soluções $X(x)$ não identicamente nulas satisfazendo a condição homogénea na fronteira $X(0) = X(1) = 0$, tem que ser $k < 0$, e nesse caso as soluções são $X(x) = c_2 \sin \sqrt{-k}x$ com $c_2 \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{-k} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Então para $k = -n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, escolhe-se $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$ e $X_n(x) = \sin n\pi x$. Notando que a equação diferencial e a condição na fronteira admitem uma solução estacionária constante $v(x) = 5$, conclui-se que a solução geral da equação diferencial e da condição na fronteira é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x + 5 \ .$$

Ao impôr a condição incial,

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin n\pi x + 5 = 7 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin n\pi x = 2 \ ,$$

verifica-se que se deve escolher $c_n = 2b_n$ onde b_n são os coeficientes da série de senos de 1 calculada na alínea anterior. Assim, a solução do problema é

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1, n \text{ ímpar}}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x + 5 \ .$$

$\square$

(3) Calcule a transformada de Laplace da função

$$\frac{e^{-t}-1}{t}\ , \quad t>0\ .$$

Sugestão: Use as propriedades da transformada de Laplace.

Resolução: *Seja* $f(t)=\frac{e^{-t}-1}{t}$, $t>0$. *Como* $tf(t)=e^{-t}-1$ *tem transformada de Laplace* $\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$, *a transformada de* $f(t)$ *será* $F(s)=-\int\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right)ds+c$ *para alguma constante* c. *Escolhendo a primitiva* $\ln\left|\frac{s+1}{s}\right|$, *deve-se tomar* $c=0$ *pois* $\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$. *Concluí-se que*

$$F(s)=\ln\frac{s}{s+1}\ , \qquad \text{para } s>0\ .$$

□