

# Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e LERCI - 2º Semestre 2003/2004

## Teoria dos erros

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente  $x$  em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos
  - (a)  $x = 1/6$
  - (b)  $x = 1/3$
  - (c)  $x = -83784$
  - (d)  $x = -83785$
  - (e)  $x = 83798$
  - (f)  $x = 0.0013296$
2. Tomaram-se para valores aproximados de  $N_1 = 0.3000 \times 10^1$ ,  $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$  e  $N_3 = 0.3000 \times 10^4$ , respectivamente os valores  $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$ ,  $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$  e  $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$ . Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.
3. Considere os números  $x = \pi$  e  $y = 2199/700$ .
  - (a) Pretendem-se aproximações  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda  $\tilde{x} - \tilde{y}$ .
  - (b) Calcule os erros absolutos e relativos de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  e de  $\tilde{x} - \tilde{y}$ , bem como as percentagens de erro. Comente.
  - (c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em ponto flutuante com 6 algarismos na mantissa os números  $x$  e  $y$ . Determine  $fl(fl(x) - fl(y))$  e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?
4. Determine o erro absoluto cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema ponto flutuante com mantissa de comprimento 6.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad (1)$$

- (a) Calcule  $f(10^{-6})$  utilizando a fórmula (1).
- (b) Obtenha uma aproximação de  $f(10^{-6})$ , utilizando o desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor, em torno de  $x = 0$ .

(c) Sabendo que  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ , calcule  $f(10^{-6})$  utilizando uma nova fórmula para  $f$ .

(d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

6. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de  $x$  muito grandes o erro relativo era também muito grande.

(a) Verifique que o erro relativo é 100% para  $x = 2000$ . Qual o valor do erro relativo para valores de  $x$  ainda maiores?

(b) Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular  $f(x)$  que não apresente erros relativos tão grandes.

7. Na equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ , admita-se que os coeficientes são todos positivos e exactos e que  $b^2 \gg ac$ . Como é sabido, as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faça  $a = 1$ ,  $b = 62.10$  e  $c = 1$ . A equação correspondente tem raízes  $x_1 \simeq -0.01610723$  e  $x_2 \simeq -62.08390$ . Usando aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para  $x_1$  e  $x_2$ . Dê uma explicação para o mau valor que obteve para  $x_1$  e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

8. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$(I) \begin{cases} 0.003000 x_1 + 59.14 x_2 = 59.17 \\ 5.291 x_1 - 6.130 x_2 = 46.78 \end{cases}$$

com solução exacta  $x_1 = 10.00$  e  $x_2 = 1.000$ . Suponha que efectua os cálculos no sistema FP(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, com e sem pesquisa parcial de pivot.

9. Consideremos o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss

(a) sem pesquisa de pivot;

(b) com pesquisa parcial de pivot.

Compare os resultados e comente.

10. Considere os seguintes dois sistemas de equações equivalentes:

$$(I) \begin{cases} 0.00005x + y = 0.5 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x + 20000y = 10000 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Supondo que efectua os cálculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?