Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

Sistemas de equações

1. Condicionamento de sistemas lineares

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$ e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1\ 1]^T$.

   (a) Determine cond(A) na norma $||\ \ ||_\infty$.

   (b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \epsilon, \quad 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_b||_\infty$ e $||\delta_x||_\infty$. Comente os resultados.

   (c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \quad 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_b||_\infty$ e $||\delta_x||_\infty$. Comente.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

3. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n, com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule A^{-1}.

   (b) Determine os números de condição $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

   (c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbf{R^n}$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

   Sejam x_1 e x_2, respectivamente, as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$. Determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

   no caso de $n = 20$. Comente.

2. Métodos de factorização

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Obtenha a factorização de Crout da matriz A.

   (b) Usando a factorização anterior, resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [13500, 11250, 12000, 4250]^T$.

2. Considere o sistema $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que A se pode decompôr na forma $A = LL^T$, com L triangular inferior e determine a matriz L.

   (b) Usando a decomposição anterior, resolva o sistema $Ax = b$.

3. Métodos iterativos para sistemas lineares

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

   (a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

   (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4^{a} iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

   (c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

   (d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Verifique que este sistema pode ser resolvido pelo método de Jacobi e para $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

3. Considere o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+z & = & 2 \\ -x+y & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{array}\right. .$$

   (a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

   (b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

4. Pretende-se resolver um certo sistema $A\,x = b$, onde **A** é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

   (a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações .Justifique e diga quantas.

   (b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

4. Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = 9 \end{array}\right.$$

   tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

   (a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Obtenha ainda o vector **b**.

   (b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss com **pesquisa parcial de pivot**, e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

2. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{l} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{array}\right.$$

   (a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

(b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Doolittle e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

(d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.