Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

Aproximação de funções

1. Interpolação Polinomial

1. Na tabela seguinte são apresentados valores (exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule o valor interpolado para $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.

2. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

   (a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

   (b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

   (a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

   (b) Admitindo que $f \in C^3([0, 1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

4. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

5. Considere a seguinte tabela de valores de um polinómio p

x_i	-1	1	4
$p(x_i)$	2	-2	-8

Sabendo que $p[-1, 1, 2] = 4$ e $p[-1, 1, 2, 4, x] = 3$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\}$, determine p.

6. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

2. Mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

(b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

2. Determine a função da forma
$$g(x) = Be^x + Ce^{-x}$$
que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo
$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$
Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados. (*Sugestão: poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis*)

4. Seja f tal que $f(-2) = 3$, $f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que
$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$
quaisquer que sejam α, β constantes reais.