Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

Integração Numérica

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

   (a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola f nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

   (b) Suponha que pretendemos aproximar $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ por $\int_{-2}^{2} p_2(x)dx$. Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j = 1, 2, 3, 4$ no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

2. Seja $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ e seja $\mathcal{P}_m$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m. Pretende-se aproximar I por uma fórmula do tipo

$$Q(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

   com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

   (a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$ nos seguintes casos

   (i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;
   (ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;
   (iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;
   (iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.

   (b) Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior, determine o grau de Q.

3. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1, 1]$

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

   para aproximar o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   (a) Determine A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

   (b) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\dfrac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

   (c) Para que valores de x_0 e x_1 a fórmula terá grau 3? Quais são, neste caso os valores de A_0 e A_1?

4. Considere o integral $\int_0^1 \exp(x^2)dx$.

   (a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando
   (i) a regra dos trapézios;
   (ii) a regra de Simpson.

   (b) Faça uma estimativa do número de subintervalos que deveria considerar, se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com erro inferior a 10^{-4}, utilizando
   (i) a regra dos trapézios;
   (ii) a regra de Simpson.

5. Utilizando a regra dos trapézios composta, mostre que

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

6. Dedução da <u>Regra do ponto médio</u>.

   (a) Mostre que

$$\int_{a_0-\frac{h}{2}}^{a_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(a_0) + \frac{h^3}{24}f''(\theta), \quad \theta \in [a_0 - \frac{h}{2}, a_0 + \frac{h}{2}]$$

   (b) Deduza a respectiva fórmula composta para aproximar um integral $\int_a^b f(x)dx$.