Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.
   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.
   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.
   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Use o método da bissecção para aproximar, com erro inferior a 10^{-6}, a raiz da equação
$$e^x - \sin x = 0.$$
mais próxima de zero.

3. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação
$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$
   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.
   (b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.
   (c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

4. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação
$$x^3 - \cos x = 1,$$
no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas ainda teria que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

5. Considere a equação
$$x \tan(x) - 1 = 0,$$
Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

6. Considere a função

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

(a) Mostre que o método de Newton converge para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

(b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

(c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

(d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

7. Considere a equação

$$e^x = 2 - x^2.$$

(a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5, 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I que contenha a raiz.

(b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

(c) Indique um majorante do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

8. Considere a função

$$f(x) = 2\ln(x^2 + 1) - x^2 + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Aproxime, com erro inferior a 10^{-4}, todas as raízes da equação $f(x) = 0$.