1^o Teste de Matemática Computacional

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

1. Considere a equação
$$x^2 - ax - b = 0$$
cujas soluções são $z_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ e $z_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$.

   (a) Seja $a > b \geq 1$. Mostre que o método numérico
$$x_0 \in [a, a+b], \quad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$
   converge para a maior raiz da equação. Qual a ordem de convergência deste método?

   (b) No caso $a = 101$, $b = 1$, a execução do comando
$$NestList[(101 + 1/\#)\&, SetPrecision[101, 10], 3]$$
   produziu o seguinte output:
$$\{101.0000000, 101.00990099010, 101.009900019603999, 101.0099000196991178095\}$$
   Com base neste resultado, obtenha um majorante do erro relativo $|z_1 - x_3|/|z_1|$.

   (c) Sejam $a = 1000$ e $b = 1$. Para calcular a menor raiz da equação usou-se o algoritmo
$$w_1 = a^2; \quad w_2 = 4b; \quad w_3 = w_1 + w_2; \quad w_4 = \sqrt{w_3}; \quad w_5 = a - w_4; \quad w_6 = w_5/2$$
   cuja execução no sistema FP(10,6,-30,30) produziu o resultado $\tilde{z_2} = 0$.

      i. Qual o erro relativo de $\tilde{z_2}$? Como justifica este resultado?

      ii. Proponha um algoritmo alternativo para o cálculo de z_2.

   (d) Seja $a = 0$. Mostre que o método
$$x_{m+1} = \frac{b}{x_m}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$
   não pode convergir para $\sqrt{b}$, a menos que $x_0 = \sqrt{b}$.

2. Considere o sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, onde
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial.

   (b) Pretende-se calcular a segunda coluna de $\mathbf{A^{-1}}$. Para tal, efectue duas iterações do método de Jacobi e calcule um majorante do erro dessa aproximação na norma $\|.\|_1$.