2^o Trabalho de Matemática Computacional

LEGI e **LERCI** - 2^o Semestre 2003/2004

1^a Parte

1. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma lista de pontos, contendo, os nós de interpolação e os correspondentes valores a interpolar, retorna o polinómio interpolador nesses pontos obtido pela *fórmula de Newton com diferenças divididas*.

   (b) Usando o programa da alínea anterior, obtenha aproximações polinomiais para as seguintes funções

   (i) $f(x) := \exp x$ no intervalo $[0, 2]$;

   (ii) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[-5, 5]$.

   Considere vários nós de interpolação, p.ex, nós equidistantes $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, ..., n$, e nós de Chebyshev que são definidos por $x_i = a + \dfrac{b-a}{2}\left(1 + \cos\left(\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)$, $i = 0, ..., n$, e faça variar o número de pontos n. Apresente as expressões dos polinómios interpoladores e compare graficamente os resultados obtidos. Comente sobre a convergência da interpolação polinomial quando o número de nós de interpolação tende para infinito.

2. O método dos mínimos quadrados pode ser modificado de modo a considerar cada ponto (x_k, y_k) com um certo peso p_k.[1] Tendo em conta a ponderação por estes pesos, o sistema a resolver é $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$, com

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{n} p_k \Phi_i(x_k)\Phi_j(x_k), \quad b_j = \sum_{k=0}^{n} p_k y_k \Phi_j(x_k).$$

   As funções Φ_i, $i = 0, ..., m$, definem a função de ajustamento $g(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \Phi_k(x)$.

   Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo duas listas, contendo, respectivamente, os pontos a ajustar e os correspondentes pesos, e as funções de base, retorna a função que melhor se ajusta aos pontos no sentido dos mínimos quadrados.

3. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e um natural n retorna uma aproximação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pela regra dos trapézios composta

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})\right].$$

   (b) Calcule um valor aproximado de

$$\arctan x = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt$$

   para $x = 2, 4, 10$ usando a regra dos trapézios composta.

[1] O caso estudado nas aulas corresponde a $p_k = 1$, $k = 0, ..., n$.

2^a Parte

1. A viscosidade cinemática da água, ν, está relacionada com a temperatura da seguinte forma:

T (°C)	0	4	8	12	16	20	24
ν (10^{-2}cm^2/s)	1.7923	1.5676	1.3874	1.2396	1.1168	1.0105	0.9186

   Faça uma previsão de ν em $T = 7.5°C$ usando

   (i) interpolação polinomial;

   (ii) ajustamento de uma parábola aos dados pelo método dos mínimos quadrados.

   Apresente graficamente os dados e os resultados obtidos.

2. Pretende-se construir uma estrada para servir 10 localidades, identificadas pelas coordenadas (x, y) e com número de habitantes h, de acordo com a tabela

x	1	3	4	6	8	10	15	16	18	20
y	1	5	7	4.5	12	28	20	19	14.5	10
h	200	150	400	210	355	100	245	200	490	110

   A estrada deve ser uma curva cúbica

$$t(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

   e passar mais próximo das localidades com mais habitantes. Determine o traçado da estrada de modo a minimizar a soma quadrática, ponderada pelo número de habitantes, das distâncias a cada localidade.

3. A distância necessária para travar um carro depende da sua velocidade. Foram obtidos os seguintes dados experimentais para quantificar essa dependência

Velocidade (Km/h)	25	35	40	50	65	80	90
Distância de paragem (m)	5	7	10	13	19	27	35

   Faça uma estimativa da distância de travagem para um carro que viaja a 75 Km/h. Apresente graficamente os dados e os resultados.

4. Considere-se um projéctil disparado com uma velocidade inicial $v_0 = (10, 20)m/s$. A distância (em metros) percorrida pelo projéctil ao fim de t segundos é dada por

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{v_x(s)^2 + v_y(s)^2} ds,$$

   onde $v = (v_x, v_y)$ é a sua velocidade[2]. Usando a regra dos trapézios composta, obtenha aproximações da distância percorrida pelo projéctil ao fim de $t = 10s$, nos seguintes casos:

   (i) $v_x(s) = v_{0,x}$ e $v_y(s) = v_{0,y} - gs$, sendo $g = 9.8m/s^2$;

   (ii) $v_x(s) = v_{0,x} \exp(-1.5s)$ e $v_y(s) = v_{0,y} - gs$.

[2] As coordenadas são dadas num sistema em que o eixo dos x é paralelo à superfície da Terra e o eixo dos y é perpendicular à mesma.