Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 3 de Maio de 2004

1. Considere a seguinte equação
$$x - \cos(e^{-x}) = 0$$
que tem uma e uma só solução $z \in [0.8, 1.0]$.

   (a) Mostre que a sucessão
$$x_{n+1} = \cos(e^{-x_n}), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$
   converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0.8, 1.0]$.

   (b) Usando a sucessão (1), calcule um valor aproximado de z com erro absoluto inferior a 10^{-2}.

   (c) A execução de
```
f[x_ ]:=x-Cos[Exp[-x]];
NestList[(#-f[#]/f'[#])&,0.8,4]
```
(2)
   produziu o seguinte output
$$\{0.8, 0.925168, 0.920854, 0.921936, 0.921935\}. \tag{3}$$

      i. Qual a ordem de convergência do método implementado em (2)? Justifique.

      ii. Com base no output (3), calcule uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência do método a que se refere o ponto anterior.

2. Considere o sistema linear
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Justifique que o sistema tem solução única e que o método de Jacobi é convergente.

   (b) Partindo de $x^{(0)} = [0, 0, 0]$, efectue duas iterações do método de Jacobi e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional
LEGI

3 de Maio de 2004

Justifique todas as respostas

1. Considere a equação
$$x^2 - \log x - 2 = 0.$$
que tem uma solução $z \in [1.54, 1.6]$.

   (a) A execução de
```
NestList[((Log[#]+2)/#)&,1.6,7]
```
   produziu o seguinte output:
$$\{1.6, 1.54375, 1.57682, 1.55719, 1.56877, 1.56192, 1.56597, 1.56357\}$$
   Com base neste resultado, obtenha um majorante do erro $|z - 1.56357|$.

   (b) Utilizando um método com convergência quadrática, obtenha um valor aproximado de z, efectuando duas iterações a partir de $x_0 = 1.5$.

   (c) Poderia usar o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \exp(x^2+2)$ para aproximar z?

2. Pretende-se aplicar o método numérico
$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 1.5, \quad x_3^{(0)} = 1.5, \quad x_4^{(0)} = 1, \\ x_1^{(n+1)} = 1 + 0.25\left(x_2^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} = 0.5 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} = 0.25 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_4^{(n+1)} = 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{4}$$
ao sistema linear
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pode-se garantir a convergência do método (4) para a solução do sistema?

   (b) Efectue duas iterações do método (4) e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_1$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 17 de Junho de 2004

1. Pretende-se aplicar o método de Newton ao sistema não linear

$$\begin{cases} 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

Partindo do vector $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 4, 0)$ como aproximação inicial, escreva o sistema linear que permite obter a primeira iterada.

2. A execução no *Mathematica* de

```
tabela={{0.2,0.9992},{0.4,0.987227},{0.6,0.935897},{0.8,0.802096}};
InterpolatingPolynomial[tabela,x]//Expand
```

produziu o seguinte output

$$1.01493 - 0.159899x + 0.585887x^2 - 0.898208x^3 \tag{5}$$

(a) Construa a tabela de diferenças divididas que permite obter o polinómio (5) pela fórmula de Newton.

(b) Determine a função da forma $g(x) = a + bx^2$ que melhor se ajusta aos pontos dados em `tabela`, segundo o critério dos mínimos quadrados.

(c) Sabendo que `tabela` resulta da execução de

```
Table[{x,Cos[x^2]},{x,0.2,0.8,0.2}],
```

calcule um valor aproximado de $\int_{0.2}^{0.8} \cos(x^2)dx$ usando a regra dos trapézios.

(d) Calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 \cos(y(t)), & \text{em } [1, 2], \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$ aplicando o método de Euler com $h = 0.1$ ao problema (6).

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LEGI - 17 de Junho de 2004

1. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} xy - z^2/4 = 1 \\ xyz - x^2 - y^2 = 2 \\ e^x - x^2 e^y + z = 3 \end{cases} \tag{7}$$

Obtenha o sistema linear que permite calcular a primeira iterada do método de Newton para resolver o sistema (10), partindo da aproximação inicial $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = (0, 1, 1)$.

2. Sabendo que

$$\sqrt{1.03} = 1.0149$$
$$\sqrt{1.04} = 1.0198$$

obtenha, por interpolação linear, um valor aproximado de $\sqrt{1.035}$ e calcule um majorante do erro dessa aproximação.

3. A execução no *Mathematica* de

```
g=Cos[Pi #/2]&;
tab=Table[{i,g[i]},{i,-1,2}];
Fit[tab,{1,x^2},x]
```

produziu o seguinte output:

$$0.666667 - 0.444444x^2. \tag{8}$$

(a) Indique o sistema linear que permite obter a função (8).

(b) Usando a regra dos trapézios, calcule um valor aproximado de

$$\int_0^1 g(x^2)dx$$

com erro inferior a 0.05.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t)\cos(y(t)), \ t \in [2, 3] \\ y(2) = 1.5 \end{cases}$$

Usando o método de Heun com $h = 0.1$, calcule um valor aproximado de $y(2.2)$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Exame de Matemática Computacional - LEGI e LERCI - 24 de Julho de 2004

Justifique todas as respostas

I Parte

1. Considere a equação

$$\frac{e^{-x}}{2} = 1 - x^2 \tag{9}$$

que tem uma única solução z no intervalo $[0.6, 1]$.

(a) Mostre que o método de Newton aplicado à equação (9) converge para z, se a iterada inicial fôr $x_0 = 1$.

(b) Obtenha um valor aproximado de z, efectuando duas iterações do método de Newton com $x_0 = 1$, e calcule um majorante do erro dessa aproximação.

(c) A execução no *Mathematica* de

```
NestList[(2+#-2 #^2-Exp[-#])&,0.5,6]
```

produziu o seguinte output:

$$\{0.5, 1.39347, -0.738257, -1.92059, -14.1229, -1.36027\times10^{6}, -1.796019397\times10^{590756}\}$$

Diga o que o output sugere quanto à convergência (para z) do método do ponto fixo implementado e dê uma justificação teórica para estes valores.

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 = 1 \\ 0.7x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2 \\ -0.2x_1 + x_2 - 0.8x_3 = 2 \end{cases} \tag{10}$$

(a) Mostre que está garantida a convergência do método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema.

(b) Efectue duas iterações do método de Gauss-Seidel, começando com $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 2, 0)$.

II Parte

1. Considere a seguinte tabela de concentrações em função do tempo, $c = c(t)$,

t_i	1	2	3	5
$c(t_i)$	9	7	6	5

   (a) Usando três nós de interpolação apropriados e a fórmula de Newton, determine um valor aproximado de $c(4)$.

   (b) Determine as constantes a, b que minimizam o erro quadrático

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{3} \left[c(t_i) - a - \frac{12b}{t_i + 1} \right]^2 .$$

2. Pretende-se aproximar $log\, 3$ usando apenas operações elementares e a identidade

$$log\, 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx.$$

   (a) Obtenha um valor aproximado de $log\, 3$ usando a regra dos trapézios nos pontos $1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

   (b) Calcule um majorante do resultado anterior (sem obter $log\, 3$ com a máquina de calcular).

3. Pretende-se aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

   pela fórmula de quadratura

$$Q(f) = f(-1/3) + f(1/3).$$

   Sabendo que, no caso $f \in C^2([-1,1])$, é válida a igualdade

$$I(f) - Q(f) = Mf''(\xi), \quad \xi \in [-1,1],$$

   determine a constante M.

4. Considere o seguinte programa *Mathematica* para a resolução numérica de um problema de valor inicial

```
f[t_,y_]:=y Exp[-y]/(1+t^2);
y=1;                                                    (11)
Table[y=y+0.1 f[1+0.1 i,y],{i,0,10}]
```

   (a) Indique o problema de valor inicial que se pretende resolver e o método numérico implementado.

   (b) Sabendo que da execução de (11) resultou

$$\{1.01839, 1.03504, 1.05011, 1.06376, 1.07617, 1.08746, 1.09775, 1.10717, 1.1158, 1.12373, 1.13103\},$$

   indique valores aproximados da solução da equação diferencial nos pontos $t = 1.5$ e $t = 1.8$.