2° Trabalho de Matemática Computacional

LEGI e **LERCI** - 2° Semestre 2004/2005

1ª Parte

1. (a) Seja $\{g_1, ..., g_n\}$ um conjunto de funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e sejam $x_1, ..., x_n$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$. Dados valores $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$, considere o seguinte problema de interpolação: determinar uma função $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ verificando

$$u(x_j) = y_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Mostre que as propriedades seguintes são equivalentes:

i. O problema de interpolação tem solução $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ única.

ii. A matriz $n \times n$ com entradas $g_k(x_j)$, $k, j = 1, ..., n$, é invertível.

Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma lista de funções $\{g_1, ..., g_n\}$, uma lista de nós de interpolação $\{x_1, ..., x_n\}$ e os correspondentes valores a interpolar $\{y_1, ..., y_n\}$, retorna a função u interpoladora nesses pontos.

(b) Considere os pontos dados na tabela

x_k	-1	1	3	4	6
y_k	1	-1	10	0	1

Determine a função da forma $S(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{c_k}{(x - x_k)^2 + 1}$ que verifica $S(x_k) = y_k$, para $k = 0, ..., 4$.

(c) Obtenha aproximações polinomiais para função $f(x) := \frac{1}{1 + x^2}$ no intervalo $[-5, 5]$. Considere vários nós de interpolação, p.ex, nós equidistantes $x_i = a + i\frac{b - a}{n}$, $i = 0, ..., n$, e nós de Chebyshev que são definidos por $x_i = a + \frac{b - a}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)}\right)\right)$, $i = 0, ..., n$, e faça variar o número de pontos n. Apresente as expressões das funções interpoladoras e compare graficamente os resultados obtidos. Comente sobre a convergência da interpolação quando o número de nós de interpolação tende para infinito.

2. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e um natural par n retorna uma aproximação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pela regra de Simpson composta

$$S_n(f) = \frac{b - a}{3n}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right],$$

onde $x_j = a + j(b - a)/n$.

(b) Calcule um valor aproximado de

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

para $x = 2, 4, 10$ usando a regra de Simpson composta.

2ª Parte

1. Os valores da seguinte tabela referem-se à taxa de fluxo de água (l/m) para um tanque durante 10 minutos. Determine uma aproximação da quantidade de água que entrou no tanque durante esse período, usando a regra de Simpson.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q (l/m)	230	300	320	330	320	290	250	200	160	120	90

2. O tempo que um carro demora a passar da velocidade inicial 30 km/h para uma velocidade superior está descrito na seguinte tabela

Velocidade (Km/h)	30	45	50	75
Tempo (s)	0	1.8	4.3	9.4

   (a) Estime o tempo necessário para atingir 48 km/h, usando interpolação polinomial.

   (b) Estime o tempo necessário para atingir 100 km/h, usando regressão linear (ajustamento de uma recta pelo método dos mínimos quadrados).

3. Um fluido atravessa a secção circular dum tubo com velocidade

$$v(r) = 3.0(1 - r/r_0)^{1/7},$$

onde r é a distância radial ao centro da secção e $r_0 = 4$cm é o raio da secção. Usando a regra de Simpson, determine a quantidade de fluido por unidade de tempo que atravessa esta secção, dada por

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} r v(r) dr.$$