1^o Teste de Matemática Computacional

LEGI e **LERCI**

1. Considere a equação
$$x^2 - ax - b = 0$$
cujas soluções são $z_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ e $z_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$.

   (a) Seja $a > b \geq 1$. Mostre que o método numérico
$$x_0 \in [a, a+b], \quad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$
converge para a maior raiz da equação. Qual a ordem de convergência deste método?

   (b) No caso $a = 101$, $b = 1$, a execução do comando
$$NestList[(101 + 1/\#)\&, SetPrecision[101, 10], 3]$$
produziu o seguinte output:
$$\{101.0000000, 101.00990099010, 101.009900019603999, 101.0099000196991178095\}$$
Com base neste resultado, obtenha um majorante do erro relativo $|z_1 - x_3|/|z_1|$.

   (c) Sejam $a = 1000$ e $b = 1$. Para calcular a menor raiz da equação usou-se o algoritmo
$$w_1 = a^2; \quad w_2 = 4b; \quad w_3 = w_1 + w_2; \quad w_4 = \sqrt{w_3}; \quad w_5 = a - w_4; \quad w_6 = w_5/2$$
cuja execução no sistema FP(10,6,-30,30) produziu o resultado $\tilde{z}_2 = 0$.

      i. Qual o erro relativo de $\tilde{z}_2$? Como justifica este resultado?

      ii. Proponha um algoritmo alternativo para o cálculo de z_2.

   (d) Seja $a = 0$. Mostre que o método
$$x_{m+1} = \frac{b}{x_m}, \quad m = 0, 1, 2, ...$$
não pode convergir para $\sqrt{b}$, a menos que $x_0 = \sqrt{b}$.

2. Considere o sistema de equações lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, onde
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema, independentemente da aproximação inicial.

   (b) Pretende-se calcular a segunda coluna de $\mathbf{A^{-1}}$. Para tal, efectue duas iterações do método de Jacobi e calcule um majorante do erro dessa aproximação na norma $\|.\|_1$.

2^o Teste de Matemática Computacional

LEGI e LERCI

1. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} 2xy + xz + yz = -3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = 2 \end{cases}.$$

Ao efectuar uma iteração do método de Newton para resolver este sistema somos conduzidos a um sistema linear. Mostre que se $[x^{(0)}\ y^{(0)}\ z^{(0)}]^T = [1\ 4\ 0]^T$ esse sistema linear é da forma

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{b}$$

e calcule o vector $\mathbf{b}$.

2. A execução no *Mathematica* de

$g[x\_] := Exp[x^2];$
$Expand[InterpolatingPolynomial[\{\{0, g[0]\}, \{1, g[1]\}, \{0.75, g[0.75]\}, \{0.25, g[0.25]\}\}, x]]$

produziu o seguinte output

$$1 + 0.220758x - 0.300670x^2 + 1.79819x^3 \tag{1}$$

(a) Usando o polinómio (1) calcule um valor aproximado de $e^{0.64}$.

(b) Sabendo que $|g^{(4)}(x)| \leq 207$, para todo o $x \in [0,1]$, obtenha um majorante do erro da aproximação calculada na alínea anterior.

3. Seja $I := \displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)dx$.

(a) Calcule um valor aproximado de I usando a regra dos trapézios com subintervalos de comprimento 0.25.

(b) Quantos subintervalos seria necessário considerar na regra dos trapézios composta de modo a garantir um erro absoluto inferior a 10^{-5} na aproximação de I?

(c) Mostre que I pode ser calculado através da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(x) = \sin(x^2), \quad \text{em } [0,1], \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(d) Obtenha um valor aproximado de I aplicando o método de Heun com $h = 0.25$ ao problema (2).

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 3 de Maio de 2004

1. Considere a seguinte equação
$$x - \cos(e^{-x}) = 0$$
que tem uma e uma só solução $z \in [0.8, 1.0]$.

   (a) Mostre que a sucessão
   $$x_{n+1} = \cos(e^{-x_n}), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$
   converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0.8, 1.0]$.

   (b) Usando a sucessão (3), calcule um valor aproximado de z com erro absoluto inferior a 10^{-2}.

   (c) A execução de
   ```
   f[x_ ]:=x-Cos[Exp[-x]];
   NestList[(#-f[#]/f'[#])&,0.8,4]
   ```
   (4)

   produziu o seguinte output
   $$\{0.8, 0.925168, 0.920854, 0.921936, 0.921935\}. \tag{5}$$

   i. Qual a ordem de convergência do método implementado em (4)? Justifique.

   ii. Com base no output (5), calcule uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência do método a que se refere o ponto anterior.

2. Considere o sistema linear
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Justifique que o sistema tem solução única e que o método de Jacobi é convergente.

   (b) Partindo de $x^{(0)} = [0, 0, 0]$, efectue duas iterações do método de Jacobi e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional
LEGI

3 de Maio de 2004

Justifique todas as respostas

1. Considere a equação
$$x^2 - \log x - 2 = 0.$$
que tem uma solução $z \in [1.54, 1.6]$.
   (a) A execução de
   ```
   NestList[((Log[#]+2)/#)&,1.6,7]
   ```
   produziu o seguinte output:
   $$\{1.6, 1.54375, 1.57682, 1.55719, 1.56877, 1.56192, 1.56597, 1.56357\}$$
   Com base neste resultado, obtenha um majorante do erro $|z - 1.56357|$.

   (b) Utilizando um método com convergência quadrática, obtenha um valor aproximado de z, efectuando duas iterações a partir de $x_0 = 1.5$.

   (c) Poderia usar o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \exp(x^2+2)$ para aproximar z?

2. Pretende-se aplicar o método numérico
$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 1.5, \quad x_3^{(0)} = 1.5, \quad x_4^{(0)} = 1, \\ x_1^{(n+1)} = 1 + 0.25\left(x_2^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} = 0.5 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_3^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} = 0.25 + 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_4^{(n)}\right), \\ x_4^{(n+1)} = 0.25\left(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{6}$$
ao sistema linear
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Pode-se garantir a convergência do método (6) para a solução do sistema?

   (b) Efectue duas iterações do método (6) e calcule um majorante de $\|x - x^{(2)}\|_1$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 17 de Junho de 2004

1. Pretende-se aplicar o método de Newton ao sistema não linear

$$\begin{cases} 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 \\ x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

   Partindo do vector $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 4, 0)$ como aproximação inicial, escreva o sistema linear que permite obter a primeira iterada.

2. A execução no *Mathematica* de

```
tabela={{0.2,0.9992},{0.4,0.987227},{0.6,0.935897},{0.8,0.802096}};
InterpolatingPolynomial[tabela,x]//Expand
```

   produziu o seguinte output

$$1.01493 - 0.159899x + 0.585887x^2 - 0.898208x^3 \tag{7}$$

   (a) Construa a tabela de diferenças divididas que permite obter o polinómio (7) pela fórmula de Newton.

   (b) Determine a função da forma $g(x) = a + bx^2$ que melhor se ajusta aos pontos dados em `tabela`, segundo o critério dos mínimos quadrados.

   (c) Sabendo que `tabela` resulta da execução de

```
Table[{x,Cos[x^2]},{x,0.2,0.8,0.2}],
```

   calcule um valor aproximado de $\int_{0.2}^{0.8} \cos(x^2)dx$ usando a regra dos trapézios.

   (d) Calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 \cos(y(t)), \quad \text{em } [1, 2], \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

   Obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$ aplicando o método de Euler com $h = 0.1$ ao problema (8).

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LEGI - 17 de Junho de 2004

1. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} xy - z^2/4 = 1 \\ xyz - x^2 - y^2 = 2 \\ e^x - x^2 e^y + z = 3 \end{cases} \tag{9}$$

Obtenha o sistema linear que permite calcular a primeira iterada do método de Newton para resolver o sistema (9), partindo da aproximação inicial $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = (0, 1, 1)$.

2. Sabendo que

$$\sqrt{1.03} = 1.0149$$
$$\sqrt{1.04} = 1.0198$$

obtenha, por interpolação linear, um valor aproximado de $\sqrt{1.035}$ e calcule um majorante do erro dessa aproximação.

3. A execução no *Mathematica* de

```
g=Cos[Pi #/2]&;
tab=Table[{i,g[i]},{i,-1,2}];
Fit[tab,{1,x^2},x]
```

produziu o seguinte output:

$$0.666667 - 0.444444x^2. \tag{10}$$

(a) Indique o sistema linear que permite obter a função (10).

(b) Usando a regra dos trapézios, calcule um valor aproximado de

$$\int_0^1 g(x^2)dx$$

com erro inferior a 0.05.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t)\cos(y(t)), \ t \in [2, 3] \\ y(2) = 1.5 \end{cases}$$

Usando o método de Heun com $h = 0.1$, calcule um valor aproximado de $y(2.2)$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Exame de Matemática Computacional - LEGI e LERCI - 24 de Julho de 2004

Justifique todas as respostas

I Parte

1. Considere a equação
$$\frac{e^{-x}}{2} = 1 - x^2 \tag{11}$$
que tem uma única solução z no intervalo $[0.6, 1]$.

   (a) Mostre que o método de Newton aplicado à equação (11) converge para z, se a iterada inicial fôr $x_0 = 1$.

   (b) Obtenha um valor aproximado de z, efectuando duas iterações do método de Newton com $x_0 = 1$, e calcule um majorante do erro dessa aproximação.

   (c) A execução no *Mathematica* de

   ```
   NestList[(2+#-2 #^2-Exp[-#])&,0.5,6]
   ```

   produziu o seguinte output:

   $\{0.5, 1.39347, -0.738257, -1.92059, -14.1229, -1.36027\times10^6, -1.796019397\times10^{590756}\}$

   Diga o que o output sugere quanto à convergência (para z) do método do ponto fixo implementado e dê uma justificação teórica para estes valores.

2. Considere o sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 = 1 \\ 0.7x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2 \\ -0.2x_1 + x_2 - 0.8x_3 = 2 \end{cases} \tag{12}$$

   (a) Mostre que está garantida a convergência do método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema (12).

   (b) Efectue duas iterações do método de Gauss-Seidel, começando com $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1, 2, 0)$.

II Parte

1. Considere a seguinte tabela de concentrações em função do tempo, $c = c(t)$,

t_i	1	2	3	5
$c(t_i)$	9	7	6	5

   (a) Usando três nós de interpolação apropriados e a fórmula de Newton, determine um valor aproximado de $c(4)$.

   (b) Determine as constantes a, b que minimizam o erro quadrático

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{3} \left[c(t_i) - a - \frac{12b}{t_i + 1} \right]^2 .$$

2. Pretende-se aproximar $log\, 3$ usando apenas operações elementares e a identidade

$$log\, 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx.$$

   (a) Obtenha um valor aproximado de $log\, 3$ usando a regra dos trapézios nos pontos $1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

   (b) Calcule um majorante do resultado anterior (sem obter $log\, 3$ com a máquina de calcular).

3. Pretende-se aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

pela fórmula de quadratura

$$Q(f) = f(-1/3) + f(1/3).$$

Sabendo que, no caso $f \in C^2([-1,1])$, é válida a igualdade

$$I(f) - Q(f) = M f''(\xi), \quad \xi \in [-1,1],$$

determine a constante M.

4. Considere o seguinte programa *Mathematica* para a resolução numérica de um problema de valor inicial

```
f[t_,y_]:=y Exp[-y]/(1+t^2);
y=1;                                          (13)
Table[y=y+0.1 f[1+0.1 i,y],{i,0,10}]
```

   (a) Indique o problema de valor inicial que se pretende resolver e o método numérico implementado.

   (b) Sabendo que da execução de (13) resultou

$$\{1.01839, 1.03504, 1.05011, 1.06376, 1.07617, 1.08746, 1.09775, 1.10717, 1.1158, 1.12373, 1.13103\},$$

   indique valores aproximados da solução da equação diferencial nos pontos $t = 1.5$ e $t = 1.8$.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LERCI - 18 de Abril de 2005

Justifique todas as respostas

1. Considere a equação
$$x\,e^x = 1$$
que tem uma e uma só raiz $z \in [0.4, 0.8]$.

   (a) Pretende-se aproximar z usando o método de ponto fixo
   $$x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$
   Mostre que o método (14) converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [0.4, 0.8]$.

   (b) Mostre que, se $x_0 \in [0.4, 0.8]$ então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|} = z$. Qual a ordem de convergência do método (14)?

   (c) A execução no *Mathematica* de

   ```
   NestList[ Exp[-#] &,0.8,4]
   ```

   produziu o seguinte output
   $$\{0.8, 0.449329, 0.638056, 0.528318, 0.589596\}.$$

   i. Calcule um majorante do erro $|z - 0.589596|$.

   ii. Quantas iterações será necessário efectuar para se obter uma aproximação de z para a qual se possa garantir um erro absoluto inferior a 10^{-5}?

   (d) Efectue duas iterações do método da secante para aproximar z.

2. A execução no *Mathematica* de

```
A = {{10, 7, 8, 7},{7, 5, 6, 5},{8, 6, 10, 9},{7, 5, 9, 10}};
b = {32.1, 22.9, 33.1, 30.9}; b̃ = {32, 23, 33, 31};
x = LinearSolve[A, b]; x̃ = LinearSolve[A, b̃];
Print["x =", x, " ; ", "x̃ =",x̃]
```

produziu o seguinte output
$$x = \{9.2, -12.6, 4.5, -1.1\};\ \tilde{x} = \{1, 1, 1, 1\}$$

   (a) Calcule $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$ e $\dfrac{\left\|b - \tilde{b}\right\|_1}{\|b\|_1}$.

   (b) Sabendo que
   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$
   explique o resultado da alínea anterior e classifique o problema quanto ao condicionamento.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LEGI - 18 de Abril de 2005

Justifique todas as respostas.

1. A equação
$$x^2 = 0.25 - x^3$$
tem uma única raiz, z, no intervalo $[0.37, 0.45]$.

   (a) Mostre que o método de ponto fixo
$$\begin{cases} x_0 = 0.45, \\ x_{n+1} = \sqrt{0.25 - x_n^3}, \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{15}$$
   converge para z com convergência linear.

   (b) Sabendo que
$$\{0.45, 0.398591, 0.432058, 0.411517, 0.424631, 0.416454, 0.421631, 0.418385, 0.420433, 0.419145\}$$
   é o resultado da execução no *Mathematica* de
```
NestList[ Sqrt[0.25 - #^ 3] &,0.45,9]
```
   calcule o termo x_{10} da sucessão (15) e obtenha um majorante do erro $|z - x_{10}|$.

   (c) O método de ponto fixo com função iteradora $g(x) = x^3 + x^2 + x - 0.25$ pode ser usado para aproximar z?

   (d) Considere agora o output
$$\{0.45, 0.421061, 0.419647, 0.419643, 0.419643\}$$
   produzido por
```
NestList[(2 #^ 3 + #^ 2 + 0.25)/(3 #^ 2 + 2 #)&,0.45,4].
```
   Compare este resultado com o fornecido pelo método (15), com base na ordem de convergência dos métodos utilizados.

2. O sistema $Ax = b$ em que
$$A = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.05 & 0.06 & 0.05 \\ 0.07 & 0.05 & 0.09 & 0.1 \\ 0.1 & 0.07 & 0.08 & 0.07 \\ 0.08 & 0.06 & 0.1 & 0.09 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.229 \\ 0.309 \\ 0.321 \\ 0.331 \end{bmatrix}$$
tem solução
$$x = [9.2, -12.6, 4.5, -1.1]^T.$$
Se os elementos do vector b forem representados com 2 dígitos na mantissa através de arredondamento simétrico, o resultado obtido é
$$\tilde{x} = [1, 1, 1, 1]^T.$$

(a) Calcule $\|\delta_x\|_\infty$ e $\|\delta_b\|_\infty$.

(b) Sabendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4100 & -600 & 2500 & 1000 \\ 6800 & 1000 & -4100 & -1700 \\ -1700 & -300 & 1000 & 500 \\ 1000 & 200 & -600 & -300 \end{bmatrix}$$

explique o resultado da alínea anterior e classifique o problema quanto ao condicionamento.

Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática • Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Teste de Matemática Computacional - LEGI e LERCI - 15 de Junho de 2005

Justifique todas as respostas

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \tag{16}$$

   (a) O método de Gauss-Seidel é convergente quando aplicado ao sistema (16)? Como deve escolher a iterada inicial?

   (b) Efectue duas iterações do método de Gauss-Seidel para a resolução do sistema (16), partindo do vector nulo.

2. Considere a tabela

x_i	2.0	2.5	3.0
y_i	0.30	0.41	0.48

   (a) Obtenha o polinómio interpolador dos pontos tabelados, através da fórmula de Newton.

   (b) Determine a função da forma $g(x) = x(a + bx)$ que melhor se ajusta aos pontos da tabela, segundo o critério dos mínimos quadrados.

3. Considere o seguinte programa *Mathematica*

```
IntNum[f_,a_,b_,n_]:=Module[{h}, h=(b-a)/n;
        h*((f[a]+f[b])/2 + Sum[f[a+j*h],{j,1,n-1}])].
```

   A execução de

```
IntNum[Log[Sin[#]]&,0.5,1.5,20]
```

   produziu o seguinte output

$$-0.235547 \tag{17}$$

   (a) O output (17) é o valor aproximado de um integral através de uma regra de integração composta. Indique esse integral e a regra de integração implementada.

   (b) Calcule um majorante do erro do resultado (17).

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sin(t^2 y(t)) - y'(t) = 0, \quad \text{em } [1, 2], \\ y(1) = 0.5. \end{cases} \tag{18}$$

   Obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$ aplicando o método de Euler com $h = 0.1$ ao problema (18).