Matemática Computacional - Exercícios

2º semestre de 2005/2006 - LEE, LEGI e LERCI

Programação em *Mathematica*

1. Calcule no *Mathematica* e comente os resultados:

   (a) $\sqrt{7}$; (b) $\sqrt{7.0}$; (c) $\sqrt{14406}$; (d) $\cos\frac{\pi}{6}$; (e) $\cos\frac{\pi}{8}$;

   (f) $5(8-\frac{3}{2})$; (g) $\frac{110\sqrt{405}}{630}$ (h) $4\pi+e$ (i) $4.3-2\sqrt{5}$.

2. Determine aproximações com precisão 30 para

   (a) $\frac{36856321}{17754197}$; (b) e; (c) $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; (d) $\cos 3$; (e) $\sqrt{37}$.

3. Usando os comandos `Solve` ou `NSolve` resolva as equações:

   (a) $1+4x+x^2+x^3=0$; (b) $x^8=3$;

   (c) $1+4x+x^2-10x^3-4x^4+8x^5=0$;

   (d) $1+4x+x^2+10x^3-4x^4+8x^5=0$;

   (e) $3+3x-7x^2-x^3+2x^4+3x^7-3x^8-x^9+x^{10}=0$.

4. Seja A a matriz 6×6 definida por $a_{ij}=i+j$, $i,j=1,...,6$, e seja $B=A+I$, onde I é a matriz identidade.

   (a) Calcule $\det A$ e $\det B$.

   (b) Resolva o sistema linear $Bx=b$, em que b é dado por $b_i=1$, $i=1,...5$, e $b_6=0$.

5. Apresente o gráfico das seguintes funções, nos intervalos referidos:

   (a) $\sin(x+\log_2(|3x|))$, $x\in[-\pi,\pi]$; (b) e^{-x^2}, $x\in[-3,3]$;

   (c) $2-5x+5x^3-2x^4$, $x\in[-2,3]$.

6. Considere a função $f(x):=e^{\sqrt{x^2-x+1}}\cos(4x)$.

   (a) Apresente o gráfico de f no intervalo $[-2,2]$.

   (b) Usando o comando `FindRoot`, encontre os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de f no intervalo $[-2,2]$.

   (c) Obtenha o polinómio de Taylor de grau 5, em torno de $x_0=0$, de f. Compare este polinómio com a função f, através de um gráfico sobreposto.

7. Um número perfeito é igual à soma dos seus divisores próprios. Por exemplo, 6 e 28 são números perfeitos.

   (a) Recorrendo ao comando `Divisors`, construa uma função que determina se um número inteiro é um perfeito ou não. Aplique a vários exemplos.

   (b) Defina uma função que devolva todos os números perfeitos encontrados numa lista de inteiros.

   (c) Determine todos os números perfeitos até 10 000.

8. A sucessão de Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$ é definida da seguinte forma: começa com os termos 0 e 1 e cada termo sucessor é a soma dos dois termos precedentes.

   Escreva uma função que calcula o $n-$ésimo número de Fibonacci

   (a) de forma recursiva;

   (b) de forma iterativa;

   (c) de forma iterativa, mas retornado um valor de ponto flutuante.

   Compare a eficiência das três funções, recorrendo à função `Fibbonaci` e ao comando `Timing`.

Teoria dos erros

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente x em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

(a)	$x = 1/6$	(b)	$x = 1/3$	(c)	$x = -83784$
(d)	$x = -83785$	(e)	$x = 83798$	(f)	$x = 0.0013296$

2. Tomaram-se para valores aproximados de $N_1 = 0.3000 \times 10^1$, $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$ e $N_3 = 0.3000 \times 10^4$, respectivamente os valores $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$, $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$ e $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

   (a) Pretendem-se aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.

   (b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

   (c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em ponto flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl\,(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?

4. Determine os erros absoluto e relativo cometidos no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

   se utilizar um sistema ponto flutuante com mantissa de comprimento 4.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}. \tag{1}$$

   (a) Calcule $f(10^{-6})$ utilizando a fórmula (1).

   (b) Obtenha uma aproximação de $f(10^{-6})$, utilizando o desenvolvimento de f em série de Taylor, em torno de $x = 0$.

(c) Sabendo que $1-\cos x = 2\,\sin^2(x/2)$, calcule $f(10^{-6})$ utilizando uma nova fórmula para f.

(d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

6. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito grande.

(a) Verifique que o erro relativo é 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

(b) Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erros relativos tão grandes.

7. Na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, admita-se que os coeficientes são todos positivos e exactos e que $b^2 \gg ac$. Como é sabido, as duas raizes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faça $a = 1$, $b = 62.10$ e $c = 1$. A equação correspondente tem raizes $x_1 \simeq -0.01610723$ e $x_2 \simeq -62.08390$. Usando aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para x_1 e x_2. Dê uma explicação para o mau valor que obteve para x_1 e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

8. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações :

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} 0.003000\,x_1 & + & 59.14\,x_2 & = & 59.17 \\ 5.291\,x_1 & - & 6.130\,x_2 & = & 46.78 \end{array}\right.$$

com solução exacta $x_1 = 10.00$ e $x_2 = 1.000$. Suponha que efectua os cálculos no sistema FP(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, com e sem pesquisa parcial de pivot.

9. Consideremos o sistema linear $A\,x = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss

(a) sem pesquisa de pivot;

(b) com pesquisa parcial de pivot.

Compare os resultados e comente.

10. Considere os seguintes dois sistemas de equações equivalentes:

$$(I)\left\{\begin{array}{lcccc} 0.00005x & + & y & = & 0.5 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \qquad (II)\left\{\begin{array}{lcccc} x & + & 20000y & = & 10000 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$$

Supondo que efectua os cálculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

Métodos iterativos para equações não lineares

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Use o método da bissecção para aproximar, com erro inferior a 10^{-6}, a raiz da equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

   mais próxima de zero.

3. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

   (a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.

   (b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.

   (c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

4. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x = 1,$$

   no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas teria ainda que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

5. Considere a equação

$$x \tan(x) - 1 = 0,$$

   Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

6. Considere a equação

$$f(x) = \cos(x) - x = 0.$$

(a) Mostre que o método de Newton converge para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

(b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

(c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

(d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

7. Considere a equação
$$e^x = 2 - x^2.$$

(a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5, 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I que contenha a raiz.

(b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

(c) Indique um majorante do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

8. Considere a função
$$f(x) = 2\ln(x^2 + 1) - x^2 + \frac{1}{1 + x^2}.$$
Aproxime, com erro inferior a 10^{-4}, todas as raizes da equação $f(x) = 0$.

9. Considere a função de variável real
$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$
e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...$

(a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.

10. Considere a iteração do ponto fixo
$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, ...$$
com função iteradora $g(x) = 1 + \arctan(x)$.

(a) Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função g.

(b) Aproxime o ponto fixo de g com erro inferior a 10^{-6}. Qual a ordem de convergência da iteração?

11. Calcule um valor aproximado de $\sqrt{10}$ usando o seguinte método numérico

$$x_{m+1} = \frac{30x_m + x_m^3}{10 + 3x_m^2}.$$

Mostre que a ordem de convergência deste método é 3.

12. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad\qquad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que $|\phi^{'}(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

13. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{2}$$

que tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

(a) Para aproximar as raízes positivas da equação (2), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$$

i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

(c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

Sistemas de equações

1. Condicionamento de sistemas lineares

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$ e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1\ 1]^T$.

   (a) Determine cond(A) na norma $||\ \ ||_\infty$.

   (b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \epsilon, \quad 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_b||_\infty$ e $||\delta_x||_\infty$. Comente os resultados.

   (c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \quad 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_b||_\infty$ e $||\delta_x||_\infty$. Comente.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

3. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n, com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule A^{-1}.

   (b) Determine os números de condição $cond_1(A)$ e $cond_\infty(A)$.

   (c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbf{R^n}$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

   Sejam x_1 e x_2, respectivamente, as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$. Determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

   no caso de $n = 20$. Comente.

2. Métodos de factorização

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Obtenha a factorização de Crout da matriz A.

   (b) Usando a factorização anterior, resolva o sistema $Ax = b$, em que

   $$b = [13500, 11250, 12000, 4250]^T.$$

2. Considere o sistema $Ax = b$ com

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que A se pode decompôr na forma $A = LL^T$, com L triangular inferior e determine a matriz L.

   (b) Usando a decomposição anterior, resolva o sistema $Ax = b$.

3. Métodos iterativos para sistemas lineares

1. Considere o sistema de equações lineares

   $$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

   (a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

   (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

   (c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

   (d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido pelo método de Jacobi e para $x^{(0)} = [0,0,0,0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

3. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z &= 2 \\ -x + y &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{cases}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

4. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

(a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações .Justifique e diga quantas.

(b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

4. Métodos iterativos para sistemas não-lineares

1. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) &= 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 &= 11 \\ 3x_1 + x_3^2 &= 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

(a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

(b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss com **pesquisa parcial de pivot**, e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

2. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

(b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Doolittle e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

(d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

Aproximação de funções

1. Interpolação Polinomial

1. Na tabela seguinte são apresentados valores (exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule o valor interpolado para $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.

2. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

   (a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

   (b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2,3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

   (a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

   (b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

4. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

5. Considere a seguinte tabela de valores de um polinómio p

x_i	-1	1	4
$p(x_i)$	2	-2	-8

Sabendo que $p[-1, 1, 2] = 4$ e $p[-1, 1, 2, 4, x] = 3$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\}$, determine p.

6. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

2. Mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

   (a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

   (b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

   (c) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

2. Determine a função da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x}$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados. (*Sugestão: poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis*)

4. Seja f tal que $f(-2) = 3$, $f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax+b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

Integração Numérica

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

   (a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola f nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

   (b) Suponha que pretendemos aproximar $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ por $\int_{-2}^{2} p_2(x)dx$. Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j = 1, 2, 3, 4$ no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

2. Seja $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ e seja $\mathcal{P}_m$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m. Pretende-se aproximar I por uma fórmula do tipo

$$Q(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

   com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

   (a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$ nos seguintes casos
   (i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;
   (ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;
   (iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;
   (iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.

   (b) Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior, determine o grau de Q.

3. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1, 1]$

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

   para aproximar o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   (a) Determine A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

   (b) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\dfrac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

   (c) Para que valores de x_0 e x_1 a fórmula terá grau 3? Quais são, neste caso os valores de A_0 e A_1?

4. Considere o integral $\int_0^1 \exp(x^2)dx$.

   (a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando

      (i) a regra dos trapézios;

      (ii) a regra de Simpson.

   (b) Faça uma estimativa do número de subintervalos que deveria considerar, se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com erro inferior a 10^{-4}, utilizando

      (i) a regra dos trapézios;

      (ii) a regra de Simpson.

5. Utilizando a regra dos trapézios composta, mostre que

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

6. Dedução da <u>Regra do ponto médio</u>.

   (a) Mostre que

$$\int_{a_0-\frac{h}{2}}^{a_0+\frac{h}{2}} f(x)dx = hf(a_0) + \frac{h^3}{24}f''(\theta), \quad \theta \in [a_0 - \frac{h}{2}, a_0 + \frac{h}{2}]$$

   (b) Deduza a respectiva fórmula composta para aproximar um integral $\int_a^b f(x)dx$.