1^o Trabalho de Matemática Computacional

LEE, **LEGI** e **LERCI** - 2^o Semestre 2005/2006

1^a Parte

1. Considere a equação
$$f(x) = 0. \tag{1}$$

   (a) O **método da bissecção** para a resolução numérica de (1) pode-se escrever na seguinte forma
$$x_0 = a, \text{ admitindo que } f(a) < 0,$$
$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k, & f(x_k) = 0, \\ x_k + (b-a)/2^{k+1}, & f(x_k) < 0, \\ x_k - (b-a)/2^{k+1}, & f(x_k) > 0 \end{cases}, \qquad k = 0, 1, ... \tag{2}$$
   Escreva um programa *Mathematica* para resolver a equação (1) pelo método da bissecção, usando o algoritmo (2). Os dados são a função f, os extremos do intervalo a e b, uma tolerância de erro ϵ e o número máximo de iterações $nmax$. O resultado pretendido é a lista das iteradas do método. O critério de paragem que envolve ϵ é
$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \epsilon.$$

   (b) Implemente o **método da secante** em *Mathematica*, usando o mesmo critério de paragem. O output pretendido é a lista das iteradas do método.

   (c) O **método de Richmond** para resolver a equação (1) é definido por
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - 0.5f(x_k)f''(x_k)}.$$
   Consiste num aperfeiçoamento do método de Newton, convergindo mais rapidamente que este e dando um factor de correcção para a iterada seguinte.
   Implemente o método de Richmond em *Mathematica*, com o critério de paragem anterior, de modo a obter como output a lista das iteradas do método.

   (d) Use os programas anteriores para resolver as seguintes equações
      i. $|x| + \sqrt{x - x^2} = 2.7x$, com $\epsilon = 10^{-6}$ e $nmax = 20$;
      ii. $x^3 = 2e^{-x}$, com $epsilon = 10^{-16}$ e $nmax = 50$.

   Apresente os resultados com 20 dígitos de precisão. Compare os vários métodos quanto à rapidez de convergência.

2. O **método de Richardson** é um método iterativo para resolver sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, definido por
$$\begin{cases} \mathbf{x^{(0)}} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}, \\ \mathbf{x^{(k+1)}} = \mathbf{x^{(k)}} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{Ax^{(k)}}), \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, ... \end{cases}$$
   onde $\alpha > 0$ é dado.

(a) Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ com diagonal estritamente dominante por linhas tal que $a_{ii} > 0$, para todo o $i \in \{1, ..., n\}$. Mostre que se

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{max_{i \in \{1,...,n\}} a_{ii}}$$

então o método de Richardson é convergente.

(b) Escreva um programa *Mathematica* para o método de Richardson, com diferentes valores do parâmetro α. Os dados são a matriz $\mathbf{A}$, o vector $\mathbf{b}$, o parâmetro α, a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$, uma tolerância de erro ε e o número máximo de iterações admissíveis $nmax$. O resultado pretendido é a lista das iteradas do método. Utilize o critério de paragem

$$\|\mathbf{x}^{(\mathbf{k+1})} - \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\|_\infty / \|\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(c) Use o programa anterior, com diferentes valores de α, para resolver o sistema $Ax = b$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^i + 2^j}, \; i \neq j, \\ 2, \; i = j \end{cases}, \qquad b_i = (-1)^i, \qquad i, j = 1, ...20.$$

Considere $\varepsilon = 10^{-6}$, $nmax = 30$ e apresente os resultados com 20 dígitos.

2^a Parte (aplicação dos métodos implementados)

1. O deslocamento $y(t)$, no instante t, de uma estrutura em oscilação é dado por:

$$y(t) = 10e^{-Kt} \cos(\omega t).$$

Determine o tempo necessário para o deslocamento ser igual a 4, quando $K = 0.5$ e $\omega = 2$.

2. Uma transportadora possui 5 tipos de camiões , os quais são equipados para transportar 5 tipos diferentes de máquinas, segundo a tabela:

	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M5$
$C1$	8	3	0	1	0
$C2$	0	12	5	0	3
$C3$	0	3	0	1	10
$C4$	2	1	6	0	1
$C5$	1	4	0	14	0

Quantos camiões de cada tipo devemos enviar para transportar 37 máquinas de tipo 1, 57 de tipo 2, 27 de tipo 3, 19 de tipo 4 e 21 de tipo 5?