2^o Trabalho de Matemática Computacional

LEE, **LEGI** e **LERCI** - 2^o Semestre 2005/2006

1^a Parte

1. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma lista de pontos, contendo, os nós de interpolação e os correspondentes valores a interpolar, retorna o polinómio interpolador nesses pontos obtido pela *fórmula de Lagrange*.

   (b) Usando o programa da alínea anterior, obtenha aproximações polinomiais para as seguintes funções
   (i) $f(x) := x \exp(\sin x)$ no intervalo $[0, 4\pi]$;
   (ii) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[-5, 5]$.
   Considere vários nós de interpolação, p.ex, nós equidistantes $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, ..., n$, e nós de Chebyshev que são definidos por $x_i = a + \dfrac{b-a}{2}\left(1 + \cos\left(\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)$, $i = 0, ..., n$, e faça variar o número de pontos n. Apresente as expressões dos polinómios interpoladores e compare graficamente os resultados obtidos. Comente sobre a convergência da interpolação polinomial quando o número de nós de interpolação tende para infinito.

2. O método dos mínimos quadrados ponderados é uma modificação do método que estudámos de modo a considerar cada ponto (x_k, y_k) com um certo peso w_k. Tendo em conta a ponderação por estes pesos, o sistema a resolver é $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{b}$, com

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{n} w_k \Phi_i(x_k)\Phi_j(x_k), \quad b_j = \sum_{k=0}^{n} w_k y_k \Phi_j(x_k).$$

   As funções Φ_i, $i = 0, ..., m$, definem a função de ajustamento $g(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \Phi_k(x)$.

   Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo duas listas, contendo, respectivamente, os pontos a ajustar e os correspondentes pesos, e as funções de base, retorna a função que melhor se ajusta aos pontos no sentido dos mínimos quadrados.

3. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $a, b \in \mathbb{R}$, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e um natural n retorna uma aproximação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pela regra do ponto médio

$$M_n(f) = h \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 1/2)h),$$

   onde $h = (b - a)/n$.

   (b) Calcule um valor aproximado de

$$\arctan x = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

   para $x = 1, 5, 10$ usando a regra do ponto médio.

2^a Parte (aplicação dos métodos anteriores)

1. Foi feito um teste para relacionar a tensão e a deformação numa barra de alumínio, tendo-se obtido os seguintes valores:

Tensão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Deformação	2	4	6	6	6	7	8	7.5	7	7.5	8	7.5

   Faça uma previsão da deformação correspondente a uma tensão de 7.4, usando

   (i) interpolação polinomial;

   (ii) ajustamento de uma função do tipo $g(x) = A + Bx + C\cos x + Dx\cos x + Ex^2\cos x$ aos dados, pelo método dos mínimos quadrados.

   Apresente graficamente os dados e os resultados obtidos.

2. Pretende-se construir uma estrada para servir 10 localidades, identificadas pelas coordenadas (x, y) e com número de habitantes h, de acordo com a tabela

x	1	3	4	6	8	10	15	16	18	20
y	1	5	7	4.5	12	28	20	19	14.5	10
h	200	150	400	210	355	100	245	200	490	110

   A estrada deve ser uma curva cúbica

$$t(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

   e passar mais próximo das localidades com mais habitantes. Determine o traçado da estrada de modo a minimizar a soma dos quadrados das distâncias a cada localidade, ponderada pelo número de habitantes.

3. Seja $\pi(x)$ o número de primos p com $2 \le p \le x$. Uma aproximação para $\pi(x)$, devida a Gauss, é dada por

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

   Usando a regra do ponto médio, estime $\pi(10), \pi(20), \pi(100), \pi(1000)$.

4. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + 2xy(x) = 0, \quad x > 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

   tem como solução a *função de erro*

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

   Calcule valores aproximados de $y(0.6)$ e $y(2.26)$, usando a regra do ponto médio.