# $1^{\text{a}}$ aula prática de Análise Numérica II

## $1^{\text{o}}$ semestre de 2002/2003

**1.** Considere uma lista de abcissas $\mathbf{x} = \{x_1, ..., x_N\}$ e a respectiva lista de ordenadas $\mathbf{y} = \{y_1, ..., y_N\}$. Pretendemos que uma função da forma

$$S(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(x - x_k)^2 + \beta}$$

verifique $S(x_k) = y_k$, $k = 1, ..., N$.

**(a)** Escreva o sistema que permite obter os coeficientes $c_k$.

**(b)** Mostre que é sempre possível encontrar $\beta > 0$ tal que o sistema da alínea anterior tenha solução única.

**(c)** Considere os pontos dados na tabela

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | -1 | 1 | 3 | 4 | 6 |
| $y_k$ | 1 | -1 | 10 | 0 | 1 |

Para $\beta = 1$, determine a função $S$ que verifica $S(x_k) = y_k$, $k = 1, ..., 5$.

**2.** Seja $\{u_1, ..., u_n\} \subset C[a, b]$ um conjunto linearmente independente e sejam $x_1, ..., x_n$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$. Dados valores $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$, consideremos o problema de interpolação: encontrar uma função $u \in U_n := \text{span}\{u_1, ..., u_n\}$ verificando

$$u(x_j) = y_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Mostre que as três propriedades seguintes são equivalentes:

**(a)** O problema de interpolação tem solução única para cada conjunto de valores $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$.

**(b)** Cada função $u \in U_n$ com zeros $x_j$, $j = 1, ..., n$ anula-se identicamente.

**(c)** A matriz $n \times n$ com entradas $u_k(x_j)$, $k, j = 1, ..., n$, é invertível.

**3.** Dados $n$ pontos distintos $z_1, ..., z_n \notin [a, b]$, $n$ pontos distintos $x_1, ..., x_n \in [a, b]$, e $n$ valores $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$, mostre que existe uma única função da forma

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - z_k}$$

com coeficientes reais $a_1, ..., a_n$ tal que $u(x_j) = y_j$, $j = 1, ..., n$.

**4.** Considere a *matriz de Vandermonde*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

com $x_i \in \mathbb{R}$. Mostre que

**(a)** $\det V = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ e conclua que se os pontos $x_0, ..., x_n$ são distintos, então $V$ é invertível

**(b)** se os pontos $x_0, ..., x_n$ são distintos, então $V^{-1} = U^\top$, onde $U = [u_{ij}]_{i,j=0}^n$ com $l_i(x) = \sum_{k=0}^{n} u_{ik} x^k$.

**5.** Sejam $x_1, ..., x_N$ $(N \geq 2)$ valores reais distintos e $f_1, ..., f_N$ os valores correspondentes de uma função $f$ nesses pontos. Prove que existe uma e uma só função $F_N$ da forma

$$F_N(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \exp(jx),$$

para a qual se tem $F_N(x_i) = f_i$, $i = 1, ..., N$.

**6.** Sejam $x_0, ..., x_n$ valores reais distintos e sejam $l_0, ..., l_n$ os polinómios de base de Lagrange associados. Mostre que

**(a)** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x_j^m l_j(x) = x^m, \quad m = 0, 1, ..., n$

**(b)** o polinómio $H_k^0(x) := [1 - 2l_k'(x)(x - x_k)]\,[l_k(x)]^2$ verifica

$$H_k^0(x_i) = \delta_{ik}, \quad \left(H_k^0\right)'(x_i) = 0, \quad i, k = 0, ..., n,$$

e $H_k^1(x) := (x - x_k)\,[l_k(x)]^2$ verifica

$$H_k^1(x_i) = 0, \quad \left(H_k^1\right)'(x_i) = \delta_{ik}, \quad i, k = 0, ..., n.$$

**7.** Mostre que as diferenças divididas

$$\begin{cases} D_j^0 = y_j, \quad j = 0, ..., n \\ D_j^k = \dfrac{D_{j+1}^{k-1} - D_j^{k-1}}{x_{j+k} - x_j}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n \end{cases}$$

relativas aos $n+1$ pontos distintos $x_0, ..., x_n$ e $n+1$ valores $y_0, ..., y_n \in \mathbb{R}$, satisfazem a relação

$$D_j^k = \sum_{m=j}^{j+k} y_m \prod_{i=j, i\neq m}^{j+k} \frac{1}{x_m - x_i}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n.$$

**8.** Dada uma função $f \in C^2[a, b]$ e três pontos $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$, com $x_0 \neq x_2$, mostre que existe um único polinómio $p$ de grau não superior a 3 para o qual se tem

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_1) = f'(x_1), \quad p''(x_1) = f''(x_1), \quad p(x_2) = f(x_2).$$

**1ª questão do 1º trabalho computacional**

**(a)** Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo duas listas de pontos, contendo, respectivamente, os nós (distintos) de interpolação e os correspondentes valores a interpolar, retorna o polinómio interpolador nesses pontos obtido pela *fórmula de Newton com diferenças divididas.*

**(b)** Usando o programa da alínea anterior, obtenha aproximações para as seguintes funções, considerando vários conjuntos de nós de interpolação,

(i) $f(x) := \exp x$ no intervalo $[0, 2]$;

(ii) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[0, 5]$, usando nós de interpolação equidistantes;

(iii) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[0, 5]$, usando nós de Chebyshev.

Apresente as expressões dos polinómios interpoladores e compare graficamente os resultados obtidos. Investigue a convergência da interpolação polinomial quando o número de nós de interpolação tende para infinito.